1 Uvod

Graf $G = (V(G), E(G))$ sestavlja množica točk $V(G)$, imenovanih **vozlišč**, ter množica **povezav** med temi vozlišči, $E(G)$. Če med vozliščema u in v obstaja povezava pravimo, da sta vozlišči u in v **sosednji**. Povezavi, ki imata skupno eno krajišče, imenujeno **incidenčni** povezavi (na primer povezavi uv in uw). **Stopnja vozlišča** u, $\deg(u)$, predstavlja število vozlišč, ki so z u sosednji. Najmanjšo stopnjo med vsemi vozlišči grafa imenujemo **minimalna stopnja** vozlišč v grafu in označimo $\delta(G)$, največjo pa **maksimalna stonja vozlišč**, $\Delta(G)$. Če sta v grafu minimalna in maksimalna stopnja enaki rečemo, da je graf **regularen**. Za grafe velja naslednja opazka:

Lema o rokovanju.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2\,|E(G)|$$

Graf $H = (V(H), E(H))$ je **podgraf** grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja: $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H se imenuje **vpeti**, če ima enaka vozlišča kot graf G. Če ima podgraf H na svojih vozliščih vse iste povezave kot graf G se imenuje **inducirani** podgraf grafa G. Graf je **povezan**, če za vsak par vozlišč v grafu obstaja pot med njima. Če graf ni povezan, je nepovezan. Vsaka povezana enota grafa se v tem primeru imenuje **povezana komponenta** grafa. Vozlišče v grafa G se imenuje **presečno vozlišče**, če graf po odstranitvi tega vozlišča postane nepovezan. Povezava e grafa G se imenuje **most**, če graf po odstranitvi te povezave postane nepovezan.

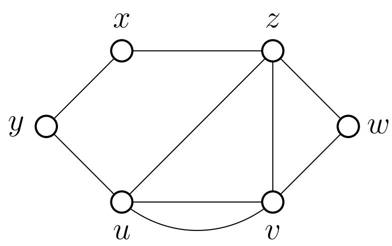
1. Nariši graf G, če je $V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$ in $E(G) = \{xz, xu, xv, yz, yv, yw, uv, vw\}$ ter določi $\delta(G)$ in $\Delta(G)$.

2. Nariši primer grafa na
   (a) štirih vozliščih s stopnjami: 2,2,3,3;
   (b) petih vozliščih s stopnjami: 1,2,2,3,3;
   (c) šestih vozliščih s stopnjami: 1,2,2,3,3,5.

3. Dokaži ali ovrzi spodnje trditve:
   (a) Obstaja 3–regularen graf na 7 vozliščih.
   (b) Vsak graf ima sodo vozlišč lihe stopnje.
   (c) Povezan r-regularen graf, kjer je r sodo število, nima mosta.

4. Poišči in poimenuj komplemente grafov: $C_5, K_4, K_{3,3}$.

5. Na sliki je podan graf G.



   (a) Nariši primer podgrafa H grafa G, za katerega je $V(H) = \{x, z, u, v\}$.
   (b) Nariši primer podgrafa H grafa G, ki je induciran z vozlišči iz množice $\{x, z, u, v\}$.
   (c) Nariši primer vpetega podgrafa H grafa G.

6. Dokaži, da ima graf G brez trikotnikov na n vozliščih največ $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ povezav.

7. Konstruiraj graf s petimi vozlišči in šestimi povezavami, ki ne vsebuje 3-ciklov.

8. Dokaži: če sta u in v edini vozlišči lihe stopnje v G, potem v G obstaja u, v-pot.

9. Za vsak $k \geq 1$ konstruiraj $(2k + 1)$-regularen graf, ki ima most.

10. Naj bo G k-regularen graf, ki nima induciranih ciklov dolžine 3.

    (a) Dokaži, da je $|V(G)| \geq 2k$.

    (b) Poišči vse take grafe G, ki imajo natanko $2k$ vozlišč.

11. Ali je katero od spodnjih zaporedij grafovsko?

    (a) 6,6,6,6,4,3,3,0;

    (b) 6,5,4,3,2,2,2,2.

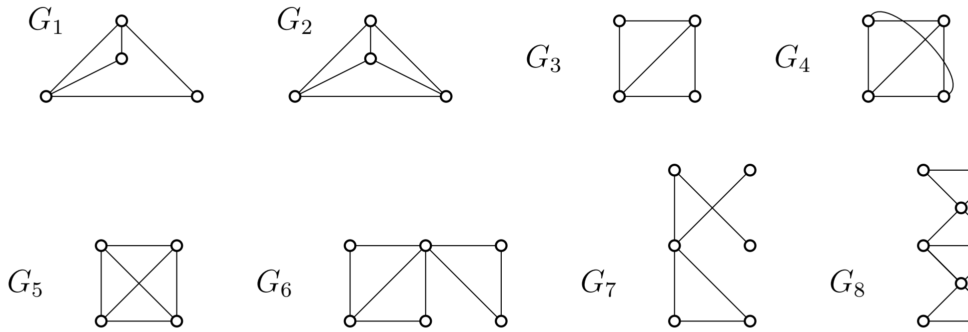
12. Za katera naravna števila k je zaporedje $\underbrace{5, 5, \ldots, 5}_{k}, 4, 3, 2, 1$ grafovsko?

13. Dokaži, da za vsako naravno število n, obstaja graf G na $2n$ vozliščih, katerega stopnje so: $n, n, n-1, n-1, \ldots, 2, 2, 1, 1$.

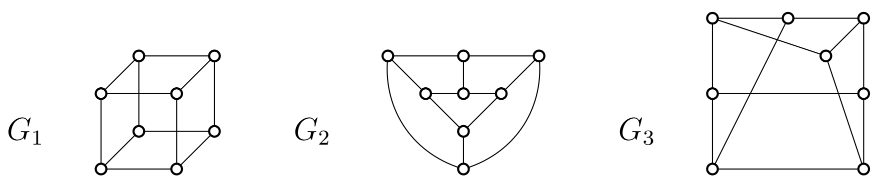
2 Izomorfizmi grafov

Bijektivna preslikava $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ je **izomorfizem** grafov, če je $uv \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $f(u)f(v) \in E(H)$.

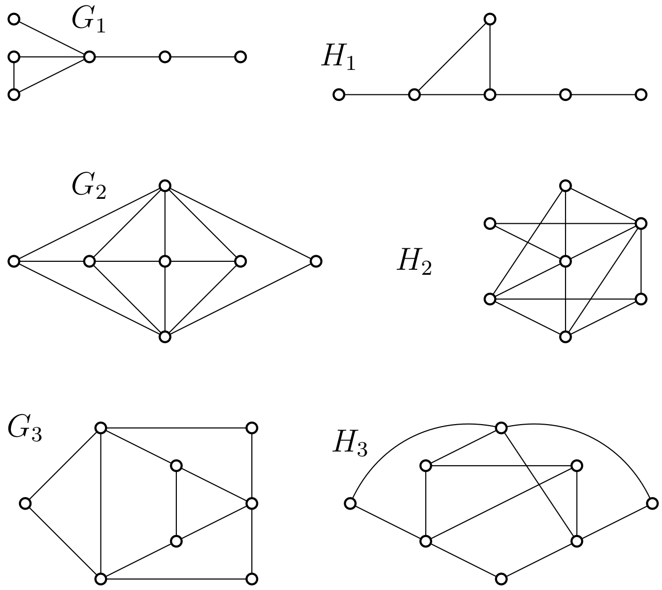
1. Grafe na sliki razdeli v skupine med seboj izomorfnih grafov. Če sta dva grafa izomorfna poišči izomorfizem, sicer poišči lastnost zaradi katere nista izomorfna.



2. Kateri od grafov na sliki so med seboj izomorfni?



3. Ugotovi ali sta grafa G_i in H_i na sliki izomorfna. Če sta, poišči izomorfizem med njima, sicer utemelji, zakaj nista izomorfna.



4. Naj bo U poljubna končna množica in $\mathcal{D}$ neka neprazna družina njenih podmnožic. Definirajmo graf G takole: $V(G) = \mathcal{D}$ in $E(G) = \{AB; A \neq B,\ A \cap B \neq \emptyset\}$. Graf G imenujemo *presečni graf* družine $\mathcal{D}$. Katerim znanim grafom sta izomorfna presečna grafa družine $\mathcal{D}$, kjer je

   (a) $\mathcal{D} = \{\{i, i+1\};\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$;

   (b) $\mathcal{D}$ družina vseh $(n-1)$-elementnih podmnožic n-elementne množice.

5. Dokaži, da je vsak graf izomorfen nekemu presečnemu grafu.

6. Petersenov graf lahko definiramo tudi takole. Vozlišča grafa G so vse 2-podmnožice 5-množice. Dve vozlišči sta sosednji natanko takrat, ko imata pripadajoči množici prazen presek. Dokaži, da imata poljubni nesosednji vozlišči v G natanko enega skupnega soseda.

7. Naj bo graf G izomorfen svojemu komplementu, to je $G \cong \overline{G}$. Dokaži, da je število vozlišč grafa G kongruentno 0 ali 1 po modulu 4.

3 Drevesa in dvodelni grafi

Drevo je povezan graf brez ciklov. Za drevesa so naslenje trditve ekvivalentne:

1. G povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$;
2. G je graf brez ciklov in $|E(G)| = |V(G)| - 1$;
3. G je povezan in vsaka povezava v G je most;
4. za vsak par vozlišč v grafu obstaja natanko ena pot med njima.

Graf G je **dvodelni graf**, če lahko množico vozlišč zapišemo kot $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ tako, da znotraj množice A ter znotraj množice B ni povezav. Izkaže se, da je graf dvodelni natanko tedaj, ko nima lihih ciklov.

1. Nariši vsa paroma neizomorfna drevesa na šestih vozliščih.
2. Naj bo $F = (V, E)$ gozd s c povezanimi komponentami. Dokaži, da je $|E| = |V| - c$.
3. Dokaži, da je zaporedje naravnih števil $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 1$ $(n \geq 2)$ zaporedje stopenj vozlišč nekega drevesa natanko tedaj, ko je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.
4. Drevo T ima stopnje vozlišč 1 in 4. Vemo, da ima natanko 10 vozlišč stopnje 4, ostala vozlišča pa so stopnje 1. Koliko povezav oziroma vozlišč premore drevo.
5. Drevo T ima štiri vozlišča stopnje 2, eno vozlišče stopnje 3, dve vozlišči stopnje 4 in eno vozlišče stopnje 5. Vozlišč višjih stopenj nima. Izračunaj koliko vozlišč stopnje 1 ima? Koliko vozliš in koliko povezav ima drevo T?
6. Naj bo $\mathcal{T}$ družina dreves, ki imajo vsa notranja vozlišča stopnje 3.
   (a) Nariši vsa neizomorfna drevesa družine $\mathcal{T}$ na 12ih in 13ih vozliščih.
   (b) Pokaži, da imajo drevesa družine $\mathcal{T}$ število listov za 2 večje od števila notranjih vozlišč.
7. Naj bo T drevo. Dokaži, da so vsa vozlišča drevesa T lihe stopnje natanko tedaj, ko imata, za vsako povezavo $e \in E(T)$, obe komponenti drevesa $T - e$ liho število vozlišč.

8. Naj bodo vsa vozlišča nekega drevesa lihe stopnje. Pokaži, da je število povezav takega drevesa liho. Ali trditev velaj za dvodelne grafe?

9. Naj bo T drevo z vozlišči stopnje 1 in k. Določi vse možne vrednosti za $|V(T)|$.

10. Naj bo G k-regularen dvodelen graf z $k > 0$ in dvodelnim razbitjem $V(G) = X + Y$. Dokaži, da velja: $|X| = |Y|$.

11. Iz standardne 8×8 šahovnice odstranimo zgornji levi kvadrat in spodnji desni kvadrat. Dokaži, da dobljene deske ne moremo pokriti z 1×2 dominami tako, da se domine med seboj ne prekrivajo.

4 Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

Sprehod v grafu je zaporedje vozlišč $v_1, \ldots, v_k$, tako da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za vsak i. Sprehod, katerega vsa vozlišča so različna, imenujemo **pot** v grafu. Če se sprehod začne in konča v istem vozlišču, govorimo o **sklenjenem sprehodu**. Sklenjen sprehod v grafu, ki poteka skozi vse povezave in sicer skozi vsako natanko enkrat je **Eulerjev obhod**. Če tak sprehod ni sklenjen, mu pravimo **Eulerjev sprehod**. Graf je **Eulerjev** če vsebuje Eulerjev obhod.

Izrek. Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj ko ima vsa vozlišča sode stopnje. Povezan graf premore Eulerjev sprehod natanko tedaj, ko ima največ dve vozlišči lihe stopnje.

Vpet cikel grafa se imenuje **Hamiltonov cikel** (to je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa). Vpeta pot grafa se imenuje **Hamiltonova pot**. Graf je **Hamiltonov**, če premore Hamiltonov cikel. O hamiltonskosti vemo naslednje:

Trditev. Naj bo G graf in S neprazna podmnožica vozlišč grafa. Če ima graf $G \setminus S$ več komponent kot je vozlišč v množici S, potem G ni Hamiltonov.
Trditev. Naj bo G Hamiltonov graf. Tedaj za vsako množico S vozlišč velja, da ima graf $G - S$ kvečjemu $|S|$ povezanih komponent.

Trditev. Naj bo G graf ter u in v njegovi nesosednji vozlišči. Če je

$$\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|\,,$$

potem je G Hamiltonov natanko tedaj, ko je Hamiltonov graf $G + uv$.

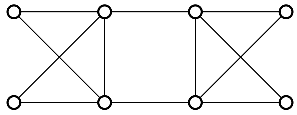
Izrek. (Ore) Naj bo G graf na vsaj treh vozliščih in naj za vsak par nesosednjih vozlišč u in v velja: $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. Potem je graf G Hamiltonov.

Izrek. (Dirac) Naj bo G graf z vsaj 3 vozlišči in naj bo $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Potem je graf G Hamiltonov.

---

1. Ali lahko graf G na sliki narišemo v eni potezi?

2. Ali obstaja Eulerjev sprehod po črnih poljih 4×4 šahovnice, če se lahko iz danega polja premaknemo le na sosednje črno polje?



3. Dvoparametrična družina grafov $G_{n,k}$, kjer je $n \geq 1$ in $0 \leq k < n$, je določena takole: $V(G_{n,k}) = \{A \subseteq \{1,\ldots,n\}; |A| \in \{k, k+1\}\}$, $E(G_{n,k}) = \{AB; A \subset B \text{ ali } B \subset A\}$. Kateri izmed grafov $G_{n,k}$ so Eulerjevi?

4. Dokaži, da je graf G Eulerjev natanko tedaj, ko je za vsako razbitje vozlišč grafa G na množici A in B, kjer velja $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$, $V(G) = A \cup B$, število povezav z enim krajiščem v A in drugim v B sodo, vendar ne enako 0.

5. Povezavni graf $L(G)$ grafa G je presečni graf povezav grafa G. (Vsaka povezava grafa G predstavlja eno vozlišče grafa $L(G)$, dve vozlišči grafa $L(G)$ sta sosednji natanko tedaj, ko sta pripadajoči povezavi v G sosednji). Dokaži ali ovrzi:

   (a) Če je G Eulerjev, potem je $L(G)$ Eulerjev.

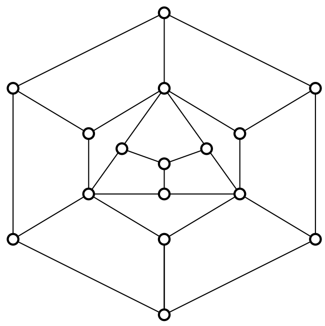
   (b) Če je $L(G)$ Eulerjev, potem je G Eulerjev.

6. Naj bo G dvodelen hamiltonov graf z dvodelnim razbitjem $V(G) = A \cup B$. Dokaži, da je $|A| = |B|$.

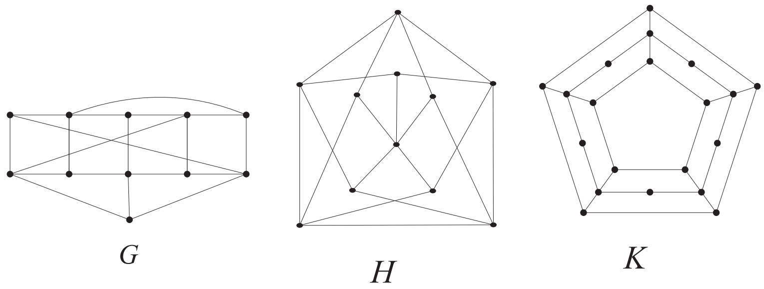
7. Za katere n so grafi K_n in W_n Hamiltonovi?

8. Za katere n je kocka Q_n Hamoltonov graf?

9. Preveri hamiltonskost grafa na sliki.



10. Za grafe na sliki 1 preveri ali so Hamiltonovi.



Slika 1: Garfi G, H, K.

11. Naj bo G graf na vsaj treh vozliščih in $n = |V(G)|$. Dokaži, da iz
$$|E(G)| \geq \binom{n-1}{2} + 2$$
sledi, da je graf G hamiltonov.

12. Dokaži, da Petersenov graf ni hamiltonov.

13. Dokaži, da za poljuben $r > 0$, vsak r-regularen graf G, z $2r+1$ vozlišči premore hamiltonovo pot.

14. Dokaži, da dvodelni graf na lihem številu vozlišč ne more biti Hamiltonov.

15. Dokaži, da je za vsako naravno število n graf $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonov in da graf $K_{n,2n,3n+1}$ ni Hamiltonov.

5 Ravninski grafi

Graf je **ravninski**, če ga lahko v ravnini narišemo tako, da se njegove povezave ne sekajo. Za povezane ravninske grafe velja naslednja zveza:

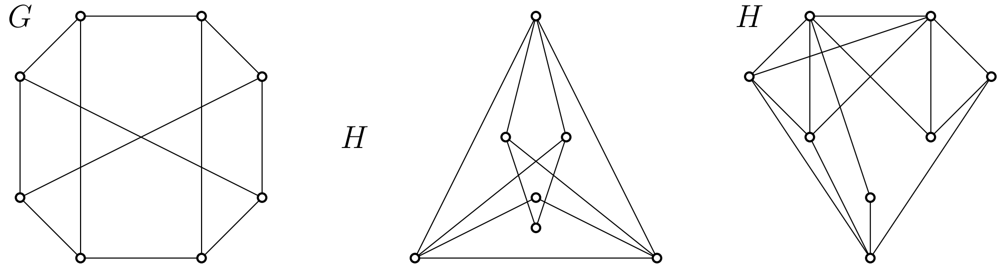
$$n - m + f = 2.$$

kjer je n število vozlišč, m število povezav, f pa število lic ravninskega grafa G.

Izrek. (Kuratowski) Graf G je ravninski natanko tedaj ko ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafa K_5 ali subdivizija grafa $K_{3,3}$.

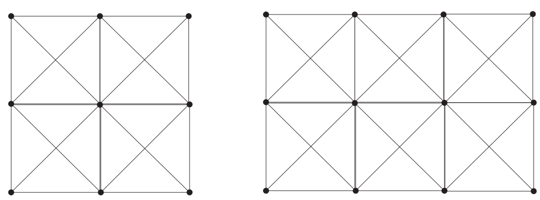
---

1. Kateri izmed grafov na sliki so ravninski? Ravninskim grafom določi še n, m in f.



2. Kateri izmed grafov $K_5, K_6, K_{3,3}$ in $K_{3,4}$ imajo lastnost, da je podgraf, ki je induciran z odstranitvijo poljubnega vozlišča, ravninski graf?

3. Ali je kateri izmed grafov G, H na sliki 2 ravninski?



Slika 2: Grafa G, H.

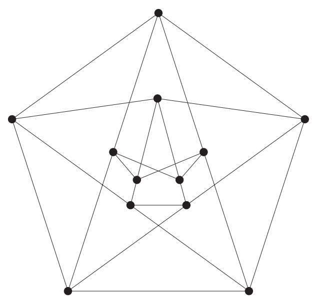
4. Graf G ima 15, graf $\bar{G}$ pa 13 povezav.

   (a) Koliko vozlišč ima graf G?

(b) Skiciraj 2 primera grafa $\bar{G}$, od katerih naj bo eden ravninski, drugi pa ne.

5. Z uporabo Eulerjeve formule dokaži, da Petersenov graf ni ravninski.

6. Ali je graf na sliki 3 ravninski?



Slika 3: Graf G.

7. Nariši 5-regularen ravninski graf.

8. Dokaži: če je G ravninski graf na vsaj 11 vozliščih, potem njegov komplement ni ravninski.

6 Barvanje vozlišč in povezav

1. **Barvanje vozlišč**

   Barvanje vozlišč grafa je preslikava $c : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, ki vsakemu vozlišču priredi neko barvo. Barvanje vozlišč grafa je dobro, če sosednjima vozliščema priredimo različni barvi. **Kromatično število** grafa, $\chi(G)$, je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo, da graf po vozliščih dobro pobarvamo. Velja naslednje:

   - Naj bo G dvodelni. Potem je $\chi(G) \leq 2$.
   - Za vsak graf G velja: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
   - **(Brooks)** Če G ni poln graf ali lihi cikel, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

2. **Barvanje povezav**

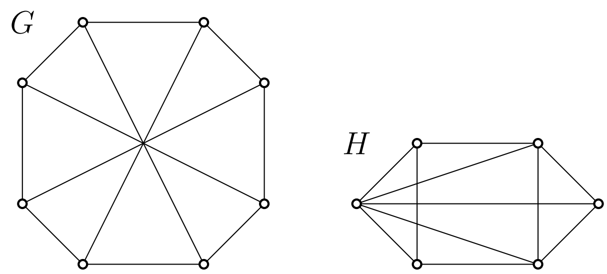
   Barvanje povezav grafa je preslikava $c : E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, ki vsaki povezavi priredi neko barvo. Barvanje povezav grafa je dobro, če incidenčnima povezavama priredimo različni barvi. **Kromatični indeks** grafa, $\chi'(G)$, je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo, da graf po povezavah dobro pobarvamo. Velja naslednje:

   $$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

   Za graf rečemo, da je *tipa 1*, če je $\chi'(G) = \Delta(G)$ in da je *tipa 2*, če je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Dvodelni grafi so tipa 1.

---

1. Določi kromatično število grafov: K_n, C_n, W_n.
2. Določi kromatično število grafov G in H na sliki.

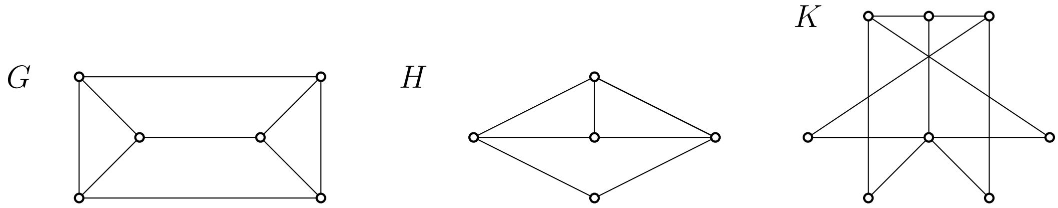


3. V tovarni so naredili skladišče kemikalij a, b, c, d, e, f, g. Pari kemikalij, ki ne smejo stati skupaj so: $ab, ac, ad, ag, bc, bd, be, bg, cd, cf, df, fg$. Najmanj koliko prostorov potrebujemo?

4. Določi kromatično število grafa $G = (V, E)$ z $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ in $E(G) = \{uv;\ u + v \text{ je praštevilo}\}$.

5. Določi kromatični indeks grafov C_n, W_n, K_n.

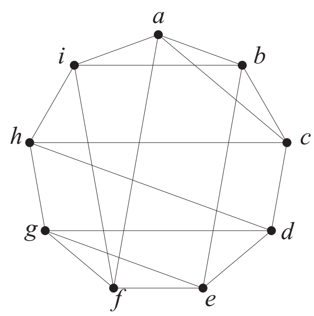
6. Določi kromatični indeks grafov G, H in K na sliki.



7. Na OŠ bo 7 svetovalnih delavcev 34 učencem svetovalo glede šolanja. Razgovori bodo potekali individualno. Vsak od učencev mora na vsaj en in največ 3 razgovore. Najmanj koliko različnih terminov za razgovore moramo določiti, če mora prvi svetovalni delavec opravit 3, drugi in tretji 10, četrti 7, peti in šesti 14 ter sedmi 9 razgovorov.

8. Na tekmovanju sodeluje n moštev. Vsako moštvo mora odigrati tekmo z vsakim od preostalih $n - 1$ moštev. Najmanj koliko kol je potrebnih, če lahko hkrati odigrajo poljubno število tekem, v katerih tekmujejo različna moštva? Za $n = 5$ zapiši tudi primer možnega razporeda.

9. Določi kromatični indeks grafa na sliki 4.



Slika 4: Grafa G.

10. Naj bo $n \geq k(k+1)$ in naj bodo vozlišča grafa $G_{n,k}$ postavljena tako, da tvorijo vozlišča enakostraničnega n-kotnika. Vsako vozlišče je sosednje s k najbližjimi sosedi v vsako smer. Dokaži, da je

$$\chi(G_{n,k}) = \begin{cases} k+1; & k+1 \text{ deli } n, \\ k+2; & \text{sicer.} \end{cases}$$