1 Načrti

1.1 Načrti in t-načrti

1. Konstruiraj $(6, 2, 3)$-načrt.
2. Ali obstaja 3-načrt s parametri $(16, 5, 2)$?
3. Dokaži, da za 2-načrt s parametri (v, k, λ_2) velja, da se vsak element pojavi v natanko r blokih, pri čemer velja: $\lambda_2(v-1) = r(k-1)$.
4. Ali obstaja 2-načrt s parametri (v, k, λ_2), kjer je
   (a) $b = 28$, $\lambda_1 = 4$, $k = 3$;
   (b) $v = 17$, $\lambda_1 = 8$, $k = 5$?
5. Naj bosta $x, y \in X$. Koliko blokov 2-načrta s parametri (v, k, λ_2) vsebuje bodisi x bodisi y?
6. 15 prijateljev sodeluje pri projektih, ki vključujejo natanko 5 udeležencev. Vsak izmed njih je sodeloval pri istem številu projektov, poljuben par je sodeloval pri natanko dveh skupnih projektih.
   (a) Na koliko projektov so se prijavili?
   (b) Na koliko različnih projektov je prijavljen vsak posameznik?
7. Profesor razdeli študentom 28 nalog. Če vsak izmed študentov reši natanko 7 nalog in za vsak par nalog velja, da jih reši natanko en par študentov, koliko študentov ima profesor?
8. Na turneji tekmovanj bo nastopilo 150 tekmovalcev. Vsak tekmovalec bo tekmoval na natanko štirih tekmovanjih, poljubnih dveh tekmovanj pa se bodo udeležili natanko trije tekmovalci. Koliko tekmovanj bo potekalo na turneji?
9. Na degustaciji sirov je tekmovalo 50 različnih sirov. Če je vsak degustator poskusil natanko 8 različnih sirov in za vsak par sirov velja, da so jih poskusili natanko štirje degustatorji, koliko degustatorjev je sodelovalo na degustaciji?
10. Na plesnem tekmovanju je nastope plesalcev ocenjevalo 25 sodnikov. Če je vsakega plesalca ocenilo natanko 5 sodnikov in za vsak par sodnikov velja, da sta oscenila natanko 2 (skupna) plesalca, koliko plesalcev je bilo na tekmovanju?

11. Naj bo $\mathcal{B}$ 2-načrt s parametri $(v, k, 1)$ in naj bo $v > k$. Dokaži, da je $b \geq v$.

12. Naj bo $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 3, b \leq v$.

    (a) Dokaži, da obstaja 2-načrt s parametri $(v, v-1, v-2)$.

    (b) Ali obstaja 2-načrt s parametri $(v, v-1, \lambda_2)$, če $\lambda_2 \neq v-2$?

13. Na degustaciji sirov je vsak od degustatorjev poizkusil 3 sire, vsak par sirov pa je poizkusil natanko en degustator. Če veš, da je vsak sir testiralo enako število degustatorjev, dokaži, da so testirali bodisi 3, bodisi $6n+1$, bodisi $6n+3$ sirov za nek $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Latinski kvadrati

1. Naj bo A $n \times n$ latinski kvadrat. Za vsako od operacij preveri ali vrne latinski kvadrat?
   (a) Vsako dvojko zamenjaj s štirico in obrtno.
   (b) zamenjaj A z A^T.
2. Naj bo $n = 539$. Ali obstaja družina desetih paroma ortogonalnih latinskih kvadratov reda n?
3. Dva ortogonalna 4×4 latinska kvadrata imata na glavni diagonali 1234.
   (a) Ali je lahko $L_1(2, 3) = L_2(2, 3)$?
   (b) Koliko je 4×4 paroma ortogonalnih latinskih kvadratov z 1234 na glavni diagonali?
4. Konstruiraj primer dveh 7×7 ortogonalnih latinskih kvadratov.
5. Za $S \subseteq \mathbb{Z}_k$ definirajmo $S + i = \{x + i \pmod k; x \in S\}$. Poišči poljubno množico S, $S \subseteq \mathbb{Z}_7$, tako da bodo vse množice $S + i$, $i \in \mathbb{Z}_7$ paroma različne.
6. Koliko je vseh $2 \times n$ latinskih pravokotnikov?
7. Naj bo A latinski kvadrat reda n in B latinski kvadrat reda m. Z uporabo A in B konstruiraj latinski kvadrat reda nm.

1.3 Končne projektivne ravnine

1. Iz različnih okrožij je bilo 7 policajev premeščenih na isto policijsko postajo. Da bi se bolje spoznali, so dobili preprosto nalogo, na krožnem križišču opazovati voznike kako vozijo. Križišče opazujejo na jutranji izmeni. Na vsaki izmeni bodo delali trije policaji, delo pa bodo opravljali en teden. Kako naj uredimo tedenski urnik izmen, da bosta vsaka dva policaja natanko enkrat na skupni izmeni?

2. Naj bo $(X, \mathcal{L})$ podana takole: $X = \{1, 2, \ldots, 13\}$. $\mathcal{L} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 7, 8, 11\}, \{2, 7, 9, 13\}, \{3, 7, 10, 12\}, \{4, 11, 12, 13\}, \{1, 5, 9, 12\}, \{2, 5, 10, 11\}, \{3, 5, 8, 13\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{1, 6, 10, 13\}, \{2, 6, 8, 12\}, \{3, 6, 9, 11\}, \{4, 8, 9, 10\}\}$. Ali je $(X, \mathcal{L})$ projektivna ravnina?

3. Naj bo X končna množica in $\mathcal{L}$ družina podmnožic od X, ki zadošča pogojema $(P1)$ in $(P2)$ in naslednjemu pogoju (P') : Obstajata vsaj dve različni premici $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, ki imata vsaka vsaj 3 točke. Dokaži, da je $(X, \mathcal{L})$ končna projektivna ravnina.

4. Imamo končno projektivno ravnino z 31 točkami. Koliko točk leži na vsaki premici?

5. Naj bo $(X, \mathcal{L})$ končna projektivna ravnina reda m. Dokaži, da obstaja 2-načrt s parametri $(m^2 + m + 1, m + 1, 1)$.

6. Naj obstaja 2-načrt s parametri $(m^2 + m + 1, m + 1, 1)$, kjer $m \geq 2$. Dokaži, da obstaja končna projektivna ravnina reda m.

7. Naj bo $(X, \mathcal{B})$ 2-načrt s parametri $(x^2 + x + 1, x + 1, 1)$. Dokaži, da za vsak $B_i, B_j \in \mathcal{B}$, $B_i \neq B_j$ velja: $|B_i \cap B_j| = 1$.