

# Ravninska in prostorska geometrija, vaje

## Skladnostni izreki. Središčni in obodni kot. Tetivni štirikotniki.

1. Nad stranicami  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  trikotnika  $ABC$  konstruiramo kvadrate  $AFGB$ ,  $BHIC$  in  $ACDE$ . Dokaži:  $|BE|=|CF|$ ,  $|AH|=|CG|$ .
2. Štirikotnik je paralelogram, če ima dva para vzporednih in enako dolgih stranic. Dokaži:
  - a) če sta v štirikotniku po dve in dve nasprotni stranici enako dolgi, je štirikotnik paralelogram;
  - b) če ima štirikotnik dva para vzporednih stranic, je paralelogram
  - c) če ima štirikotnik dve stranici vzporedni in enako dolgi, je paralelogram.
3. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.
4. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu sekata pod pravim kotom natanko tedaj, ko je ta paralelogram romb.
5. V konveksnem štirikotniku  $ABCD$  velja  $|AD|=|BC|$ , kota pri ogliščih  $A$  in  $B$  pa skupaj merita  $120^\circ$ . Nad stranico  $CD$  z zunanje strani konstruiramo enakostranični trikotnik  $CDE$ . Dokaži, da je tudi trikotnik  $ABE$  enakostraničen.
6. Na krožnici s središčem  $S$  zaporedoma izberemo točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  tako, da so lokom  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  pripadajoči središčni kot enaki in merijo  $\alpha < 60^\circ$ . Naj bo  $X$  presečišče daljic  $SC$  in  $BD$ ,  $Y$  pa presečišče daljic  $SB$  in  $AD$ . Dokaži:
  - a)  $X$  razpolavlja  $BD$
  - b)  $\angle DAB = \alpha$
  - c) Trikotnik  $ABY$  je enakokrak.
7. Naj bosta  $AC$  in  $BD$  dva med seboj pravokotna premera krožnice  $K$  s središčem  $S$ . Na loku  $CD$  krožnice  $K$  izberemo točko  $P$ . Naj bo  $E_p$  presečišče daljic  $AP$  in  $BD$ ,  $q$  vzporednica nosilki daljice  $AC$  skozi točko  $E_p$  in  $M_p$  presečišče premice  $q$  z daljico  $BP$ .
  - a) Dokaži, da je  $DE_pM_pP$  tetivni štirikotnik.
  - b) Izračunaj kote  $\angle APD$ ,  $\angle E_pM_pD$  in  $\angle BDM_p$ .
  - c) Katero množico točk opišejo točke  $M_p$ , ko točka  $P$  preteče cel lok  $CD$ ?
8. Na krožnici  $K$  zaporedoma izberemo točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$ . Dokaži, da je tetiva, ki povezuje razpolovišči lokov  $AB$  in  $CD$  pravokotna na tetivo, ki povezuje razpolovišči lokov  $BC$  in  $DA$ .

9. V ostrokotnem trikotniku  $ABC$  iz enega oglišča potegnemo višino na nasprotno stranico, iz drugega oglišča težiščnico in iz tretjega oglišča simetralo kota. Njihova presečišča tvorijo trikotnik  $XYZ$ . Dokaži, da ta trikotnik ne more biti enakostraničen.
10. V tetivnem štirikotniku  $ABCD$  stranici  $CD$  in  $AB$  nista vzporedni in se njuni nosilki sekata v točki  $P$ . Dokaži:  $|AD| \cdot |BC| = |PA| \cdot |PC|$ .

### Cevov izrek:

11. V trikotniku  $ABC$  na tretjini daljice  $AB$  leži točka  $Z$  in na petini daljice  $BC$  leži točka  $X$ . Kje na stranici  $AC$  mora ležati točka  $Y$ , da bodo Cevove daljice  $AX$ ,  $BY$  in  $CZ$  konkurentne.
12. Na stranici  $AB$  trikotnika  $ABC$  izberemo poljubno točko  $D$  in skozi njo potegnemo vzporednico s stranico  $AC$ . Ta vzporednica seka stranico  $BC$  v točki  $E$ . Naj bo  $B'$  razpolovišče stranice  $b$ . Dokaži, da so Cevove daljice  $AE$ ,  $CD$  in  $BB'$  konkurentne.
13. Dani sta vzporedni premici  $p$  in  $q$  ter na premici  $p$  daljica  $AB$ . Samo z uporabo ravnila konstruiraj razpolovišče daljice  $AB$ .

### Stewartov izrek:

14. Izračunaj dolžino Cevove daljice na simetrali notranjega kota v trikotniku.
15. Izračunaj razdaljo med težiščem  $G$  in središčem očrtanega kroga  $O$  trikotnika  $ABC$ . (Namig: trikotnik  $OBB'$ ).
16. Dokaži: če sta v trikotniku dve težiščnici enako dolgi, je trikotnik enakokrak.

### Včrtane krožnice in tangente. Pričrtane krožnice.

17. Konstruiraj skupne tangente na dve dani krožnici. Obravnavaj različne možnosti glede na lego danih krožnic.
18. Dokaži zvezi:
- a) 
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$
- b) 
$$\sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C} = |ABC|$$

## Sinusni in kosinusni izrek:

19. Načrtaj trikotnike  $ABC$  z danimi podatki, nato pa izračunaj vse tri stranice tega trikotnika:

- a)  $a + b = 17$ ,  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\beta = 80^\circ$
- b)  $c - a = 6$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $v_c = 4$ .

## Načrtovalne naloge

20. Načrtaj trikotnike s podatki:

- a)  $c = 5$ ,  $t_a = 6$ ,  $t_b = 9$
- b)  $c = 7$ ,  $v_a = 5$ ,  $t_c = 6$
- c)  $c = 6$ ,  $R = 4$ ,  $v_a = 5$
- d)  $c = 10$ ,  $\gamma = 70^\circ$  ( $110^\circ$ ),  $v_c = 4$
- e)  $a = 7$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $r = 2$

21. a) Konstruiraj trikotnik  $ABC$  s podatki  $\beta = 80^\circ$ ,  $r = 2$  cm in  $s_\beta = 5.3$  cm. Pri tem je  $r$  radij trikotniku včrtane krožnice in  $s_\beta$  dolžina dela simetrale kota  $\beta$  znotraj trikotnika.

b) Izračunaj preostala dva kota trikotnika  $ABC$ .

22. V trikotniku  $ABC$  naj bo  $I$  središče včrtane krožnice,  $I_A$  središče pričrtane krožnice, ki se dotika stranice  $a$ , in  $X$  presečišče simetrale kota  $\alpha$  s stranico  $a$ .

a) Kote trikotnika  $IBI_A$  izrazi s koti  $\alpha, \beta, \gamma$  trikotnika  $ABC$ .

b) Pri danem pravokotnem trikotniku  $IBI_A$  s pravim kotom pri oglišču  $B$  in pri dani točki  $X \in I I_A$  konstruiraj prvotni trikotnik  $ABC$ .

23. V trikotniku  $ABC$  se težiščnici  $t_a$  in  $t_c$  sekata pod pravim kotom.

a) Konstruiraj trikotnik, če je  $t_c = 9$  cm in  $v_c = 7$  cm.

b) Dokaži:  $a^2 + c^2 = 5b^2$ .

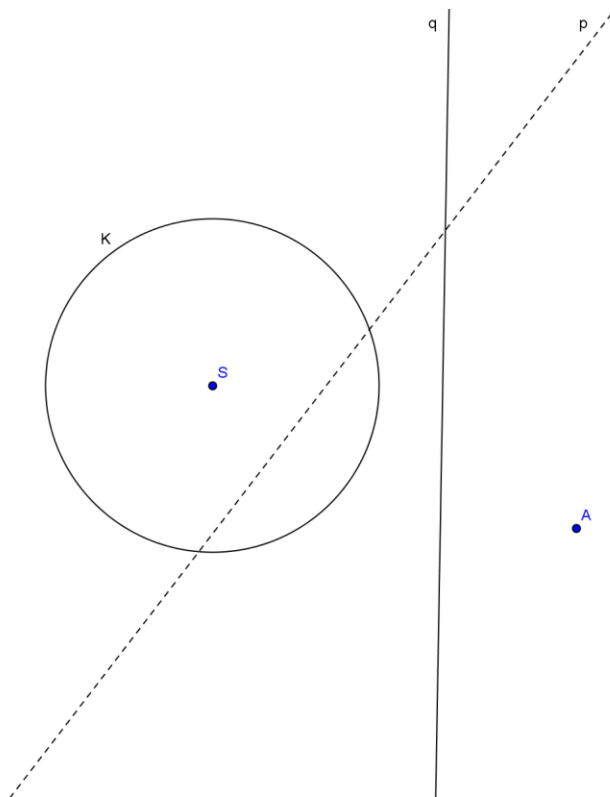
24. Konstruiraj trikotnik  $ABC$  s podatki  $r = 3$  cm,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $|IA| = 5$  cm. (Točka  $I$  je središče,  $r$  pa radij včrtane krožnice.) Nato izračunaj kot  $\alpha$  in stranico  $c$  tega trikotnika.

## Eulerjeva premica, krožnica devetih točk

25. Konstruiraj trikotnik  $ABC$ , če so dane naslednje nekolinearne točke:
- $A, G$  in  $H$ ,
  - $O, C'$  (razpolovišče stranice  $c$ ) in  $O_9$  (središče krožnice devetih točk),
  - $O, H, D$  (nožišče višine na stranico  $c$ ).
26. Kaj lahko rečemo o trikotniku  $ABC$ , če vemo, da razpolovišče  $C'$  stranice  $AB$  leži na Eulerjevi premici trikotnika.
27. Dane so krožnica  $K$  s središčem  $S$ , premica  $p$  skozi točko  $S$  in točka  $A$ , ki leži na krožnici  $K$ , vendar ne leži na premici  $p$ .
- Konstruiraj vse pravokotne trikotnike  $ABC$ , za katere je  $K$  očrtana krožnica in  $p$  Eulerjeva premica.
  - Konstruiraj vse enakokrake trikotnike  $ABC$ , za katere je  $K$  očrtana krožnica in  $p$  Eulerjeva premica.
28. V štirikotniku  $ABCD$ , ki je konveksen in ni tetiven, Eulerjeva premica trikotnika  $ABC$  sovпада z Eulerjevo premico trikotnika  $ACD$ . Dokaži:
- Skupna Eulerjeva premica obeh trikotnikov je ravno simetrala diagonale  $AC$ .
  - Štirikotnik je deltoid, torej  $|AB|=|BC|$  in  $|AD|=|DC|$ .

## Potenca točke glede na krožnico. Višinska točka in očrtani krog. Simsonova premica. Ptolomejev izrek.

29. Dan je trikotnik  $ABC$  s stranicami  $a, b, c$ , očrtano krožnico  $K$  in razpoloviščem  $C'$  stranice  $AB$ . Naj bo  $X$  drugo presečišče krožnice  $K$  z nosilko težiščnice na stranico  $c$ . Izračunaj dolžino daljice  $C'X$ .
30. Na sliki so podane krožnica  $K$ , točka  $A$  ter premici  $p$  in  $q$ .
- Konstruiraj krožnico  $L_p$  skozi točko  $A$  tako, da bo premica  $p$  potenčna premica krožnic  $K$  in  $L_p$ .
  - Konstruiraj krožnico  $L_q$  skozi točko  $A$  tako, da bo premica  $q$  potenčna premica krožnic  $K$  in  $L_q$ .  
(Namig: V primeru (b) si pomagaj s pomožno krožnico  $K'$ , ki poteka skozi točko  $A$  in seka krožnico  $K$ .)



31. Dana je krožnica  $K$  in točki  $A, B$  znotraj nje. Konstruiraj krožnico  $L$  skozi točki  $A$  in  $B$ , ki se bo dotikala krožnice  $K$ .
32. V tetivnem štirikotniku  $ABCD$  se diagonali sekata pod pravim kotom, kota  $\angle DAB$  in  $\angle CDA$  pa sta ostrata.
- Dokaži, da sta  $\angle ABC$  in  $\angle BCD$  topa.
  - Naj bosta  $M$  in  $N$  višinski točki trikotnikov  $ABD$  in  $ACD$ . Dokaži, da je štirikotnik  $BCNM$  romb.
  - Dokaži: če je štirikotnik  $BCMN$  kvadrat, potem je štirikotnik  $ABCD$  enakokraki trapez.
33. Dan je paralelogram  $ABCD$ . Krožnica skozi točko  $A$  seka daljice  $AB, AC, AD$  v točkah  $P, S, R$ . Dokaži, da velja  $|AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD| = |AS| \cdot |AC|$ .
34. Dokaži, da je ploščina tetivnega štirikotnika s stranicami  $a, b, c$  in  $d$ , ki je včrtan v krog z radijem  $R$ , enaka  $K = \frac{1}{4R} \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$ .
35. Naj bo  $ABCD$  tetivni štirikotnik, včrtan v krog  $K$  z radijem  $R$  in naj bo  $AC$  premer kroga  $K$ . Označimo kota:  $\angle CAD = \alpha$ ,  $\angle CAB = \beta$ .
- S podatki  $\alpha, \beta, R$  izrazi vse stranice in obe diagonali štirikotnika  $ABCD$ .

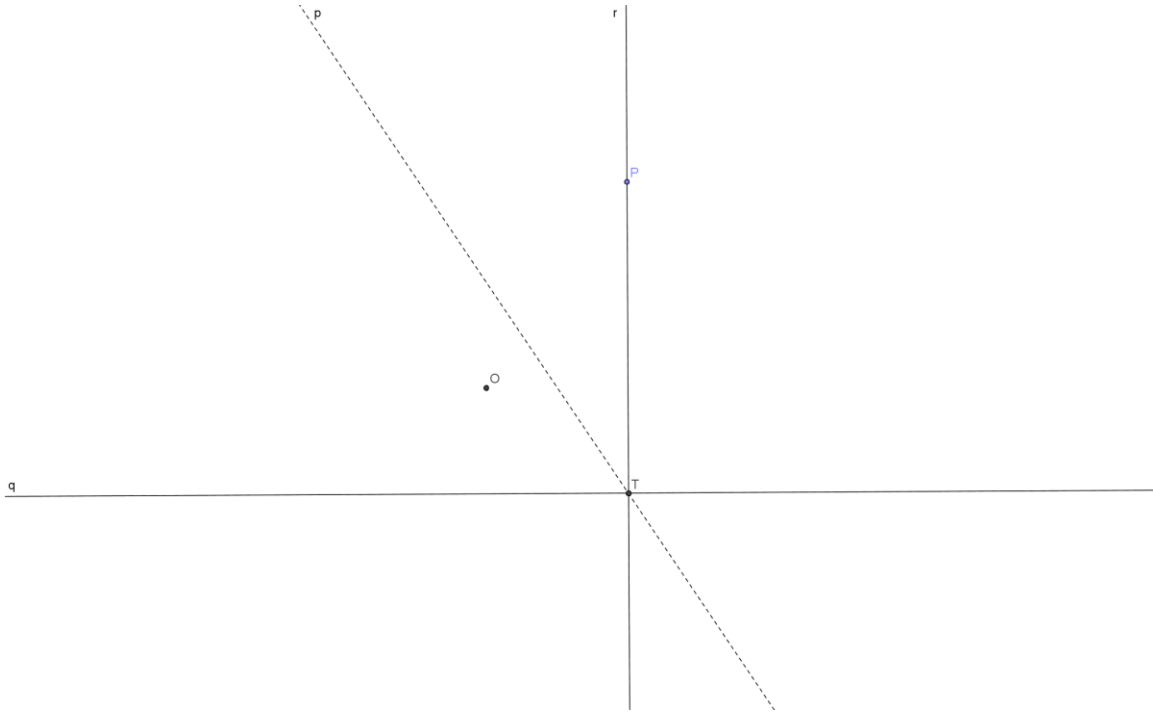
b) Zapiši Ptolomejev izrek za ta tetivni štirikotnik in ga uredi. Kateri znani obrazec dobiš?

36. Na sliki so premice  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ki se sekajo v točki  $T$ ; premici  $q$  in  $r$  sta pravokotni.

Poleg tega sta na sliki tudi točki  $P \in r$  in  $O$ .

a) Konstruiraj trikotnik  $ABC$ , za katerega bo točka  $O$  središče očrtanega kroga, premica  $q$  nosilka stranice  $c$ , premica  $p$  pa Simsonova premica trikotnika  $ABC$  glede na točko  $P$ .

b) Bi bila naloga rešljiva tudi, če bi točka  $P$  ležala izven premice  $r$ ?



37. Naj bo  $ABCD$  tetivni štirikotnik in naj bodo  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  krožnice s premeri  $AB$ ,  $AC$  in  $AD$ . Denimo, da se krožnici  $K_1$  in  $K_2$  razen v točki  $A$  sekata še v točki  $X$ , krožnici  $K_1$  in  $K_3$  še v točki  $Y$ , krožnici  $K_2$  in  $K_3$  pa še v točki  $Z$ . Dokaži, da so točke  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  kolinearne in opredeli premico, na kateri ležijo.

## Štirikotniki

38. V konveksnem štirikotniku  $ABCD$  s stranicami  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  in diagonalama  $e$ ,  $f$  sta točki  $X$  in  $Y$  razpolovišči diagonal. Dokaži, da velja:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 \cdot |XY|^2.$$

(Namig:  $XY$  je težiščnica v trikotniku  $AYC$ ).

Kaj dobimo v primeru, ko je  $ABCD$  paralelogram?

39. Konstruiraj trapez s podatki:  $a = 7$ ,  $c = 2$ ,  $d = 3$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Nato izračunaj dolžino preostale stranice  $b$ .
40. V enakokrakem trapezu  $ABCD$  z osnovnicama  $a = |AB|$  in  $c = |CD|$ , krakom  $b = |BC|$ , kotom  $\alpha = \angle DAB = \angle ABC$  in diagonalo  $e = |AC| = |BD|$  velja:  $a + b = 8$  cm,  $\alpha = 50^\circ$  in  $e = 5$  cm.
- Konstruiraj enakokraki trapez  $ABCD$ .
  - Izračunaj kot  $\angle CAB$ .
41. V trapezu z osnovnicama  $a = 7$ ,  $c = 2$  in krakoma  $b = 5$ ,  $d = 4$  se nosilki krakov sekata v točki  $S$ . Izračunaj dolžino daljice  $BS$ .
- 42.
- V trikotniku  $ABC$  sta  $A'$  in  $B'$  razpolovišči stranic  $a$  in  $b$ . Dokaži: Razpolovišča  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $W$  stranic  $AB$ ,  $BA'$ ,  $A'B'$ ,  $B'A$  so oglišča paralelograma, katerega ploščina znaša  $\frac{3}{8}$  ploščine trikotnika  $ABC$ .
  - Dokaži: paralelogram  $XYZW$  je romb natanko tedaj, ko je trikotnik  $ABC$  enakokrak.
44. Nad stranicami trikotnika  $ABC$  z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike  $APB$ ,  $CBQ$  in  $ACR$ . Središča očrtanih krogov teh trikotnikov so točke  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , ki so oglišča Napoleonovega trikotnika.
- Dokaži, da se nosilke daljic  $PO_1$ ,  $QO_2$ ,  $RO_3$  sekajo v skupni točki.
  - Dokaži, da se nosilke daljic  $AO_2$ ,  $BO_3$ ,  $CO_1$  sekajo v skupni točki.
45. Nad stranicami trikotnika  $ABC$  z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike  $APB$ ,  $CBQ$  in  $ACR$ . Očrtane krožnice teh treh trikotnikov se sekajo v točki, ki jo imenujemo *Fermatova točka* trikotnika  $ABC$  (oznaka  $Fe$ ).
- Dokaži:  $\angle AFeB = \angle BFeC = \angle CFeA = 120^\circ$  (izogonalna lastnost).
  - Dokaži: če ima točka  $T$  izogonalno lastnost, potem je  $T = Fe$ .
  - Izračunaj kot  $\angle AF_eQ$ . Na tej podlagi opiši hitrejšo konstrukcijo Fermatove točke.
  - Dokaži: med vsemi točkami  $T$  v ravnini je vsota  $|AT| + |BT| + |CT|$  najmanjša, ko je  $T = Fe$ .

## Kolinearnost

46. Stranice trikotnika  $PQR$  predstavljajo obzidje nekega posestva. Romeo, ki s starši živi na tem posestvu, ponoči skrivaj prepleza obzidje v točki  $R$  in se napoti po nosilki stranice  $PR$  v smeri stran od posestva, proti Juliji. Previdni oče je v točko  $E$  na petih sedminah daljice  $PQ$  postavil laser, ki sveti skozi vrata na razpolovišču stranice  $QR$  v noč. Ko Romeo zunaj obzidja prehodi 36 metrov, ga osvetli laser in sproži se alarm. Izračunaj, koliko je dolga stranica obzidja  $PR$ .
47. Naj bo  $ABC$  raznostranični trikotnik.
- Dokaži, da simetrala vsakega od zunanjih kotov trikotnika seka nosilko nasprotne stranice.
  - Dokaži, da so presečišča zunanjih kotov trikotnika z nosilkami nasprotnih stranic kolinearne točke.
48. Krožnice  $K_1$  in  $K_2$ ,  $K_2$  in  $K_3$  ter  $K_1$  in  $K_3$  se od zunaj dotikajo v točkah  $A, B, C$ . Naj bodo  $S_1, S_2, S_3$  središča krožnic  $K_1, K_2, K_3$  in  $p$  nosilka središč  $S_1$  in  $S_2$ . Naj bo  $q$  tista skupna tangenta krožnic  $K_1$  in  $K_2$ , ki razdeli ravnino na dve polravnini tako, da vse tri krožnice ležijo v isti polravnini. Presečišče premic  $p$  in  $q$  označimo s  $T$ . Dokaži, da so točke  $B, C$  in  $T$  kolinearne. (Namig: trikotnik  $S_1 S_2 S_3$ .)



# Transformacije

## Izometrije

49. Dani sta koncentrični krožnici  $K$  in  $L$  s središčem  $S$ , v kolobarju med njima pa točka  $T$ . Določi točki  $A \in K$  in  $B \in L$  tako, da bo točka  $T$  razpolovišče daljice  $AB$ . Kdaj je naloga sploh rešljiva?
50. Dana je premica  $p$ , krožnici  $b$  in  $d$ , ki ležita vsaka na svojem bregu premice  $p$ , in točka  $A \in p$ . Konstruiraj romb  $ABCD$ , katerega oglišče  $C$  bo ležalo na premici  $p$ , oglišče  $B$  na krožnici  $b$  in oglišče  $D$  na krožnici  $d$ . V odvisnosti od lege krožnic ugotovi, koliko rešitev ima dana naloga.
51. Dane so točka  $A$  in premici  $b$  in  $c$ . Konstruiraj enakostranični trikotnik  $ABC$  z ogliščem  $B$  na premici  $b$  in ogliščem  $C$  na premici  $c$ . Koliko rešitev ima ta naloga?
52. Krožnici  $K_1$  in  $K_2$  se sekata v točkah  $A$  in  $B$ . Skozi točko  $A$  potegni premico tako, da bosta nastali dve tetivi na krožnicah enako dolgi.
53. V trikotniku  $ABC$  nad stranico  $BC$  konstruiramo kvadrat  $BEFC$ . Na sliki so dane daljica  $AB$ , krožnica  $K_C$  in premica  $p_E$ . Konstruiraj trikotnik  $ABC$  tako, da bo točka  $C$  ležala na krožnici  $K_C$ , točka  $E$  pa na premici  $p_E$ .
54. Dana je krožnica  $K$  in točka  $T$  zunaj kroga, ki ga krožnica omejuje. Konstruiraj enakostranični trikotnik  $ABC$ , katerega točki  $A$  in  $B$  ležita na krožnici  $K$ , njegovo težišče pa je točka  $T$ . Kdaj je naloga sploh rešljiva?
55. Konstruiraj krožnico, ki se bo dotikala danih dveh vzporednih premic  $p, q$  in bo potekala skozi dano točko  $T$  v pasu med vzporednicama.
56. Pri dani krožnici  $K$  s središčem  $O$ , točkah  $A, B \in K$  in dani premici  $p$  skozi središče  $O$  konstruiraj točko  $C \in K$  tako, da bo višinska točka  $H$  trikotnika  $ABC$  ležala na premici  $p$ .

## Klasifikacija izometrij ravnine

57. Dan je trikotnik  $ABC$ . Nad stranicami  $AB$ ,  $BC$  in  $AC$  z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike  $APB$ ,  $BQC$  in  $ACR$ . Kompozitum treh rotacij ravnine za kot  $60^\circ$  okrog točk  $A$ ,  $C$  in  $B$  označimo s  $\tau$ :  $\tau = R(B, 60^\circ) \circ R(C, 60^\circ) \circ R(A, 60^\circ)$ .
- Ugotovi, kam se s transformacijo  $\tau$  preslikata točki  $C$  in  $P$ .
  - Navedi dve izometriji ravnine, ki točki  $C$  in  $P$  preslikata enako kot izometrija  $\tau$ .
  - Določi transformacijo  $\tau$ .
58. Naj bosta  $A$ ,  $B$  dve točki v ravnini. Kateri izometriji ravnine je enak kompozitum  $Z_A \circ Z_B$ ?
59. Naj bodo  $p$ ,  $q$  in  $r$  tri premice, ki potekajo skozi skupno točko  $S$ . Kateri izometriji ravnine je enak kompozitum  $Z_r \circ Z_q \circ Z_p$ ?
60. Naj bo  $\alpha$  kot, ki meri več kot  $0$  in manj kot  $180$  stopinj,  $S$  točka v ravnini ter  $\vec{v}$  neničelni vektor. Kateri izometriji ravnine je enak kompozitum  $\rho(S, \alpha) \circ t_{\vec{v}}$ ?
61. Naj bosta  $ABC$  in  $A'B'C'$  dva skladna trikotnika z isto orientacijo, pri čemer nosilki stranic  $AB$  in  $A'B'$  nista vzporedni. Dokaži, da obstaja rotacija  $\rho(S, \varphi)$ , ki trikotnik  $ABC$  preslika na trikotnik  $A'B'C'$ . Pra danih trikotnikov določi točko  $S$ .

## Raztegi

62. Na premici  $p$  zaporedoma ležijo točke  $X$ ,  $A$ ,  $Y$ ,  $B$ , za katere velja  $|XA| = |AY| = |YB|$ .
- Ugotovi, ali obstaja kaka izometrija ravnine, ki preslika  $A \mapsto A$  in  $B \mapsto Y$ .
  - Ugotovi, ali obstaja kak razteg, ki preslika  $A \mapsto A$  in  $B \mapsto Y$ . Če obstaja, določi središče in koeficient raztega.
63. Dana je krožnica  $K$  s središčem  $S$  in radijem  $r$  ter točka  $A$  znotraj kroga, ki ga omejuje krožnica  $K$ . Določi geometrijsko mesto razpolovišč daljic  $AX$ , ko točka  $X$  preteče krožnico  $K$ .
64. Dani sta daljici dolžin  $m$  in  $n$ . Opiši, kako bi geometrijsko konstruirali sliko poljubne točke  $X$  z raztegom  $\delta_{A, \frac{m}{n}}$ ?
65. Konstruiraj trikotnik s podatki:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 80^\circ$ ,  $t_a = 7\text{cm}$ .
66. Konstruiraj trikotnik s podatki:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $c : b = 5 : 3$ ,  $R = 6\text{ cm}$ .

67. Dani sta premici  $p$  in  $q$ , ki se sekata v točki  $S$ , in točka  $P$ , ki leži izven obeh premic. Konstruiraj krožnico  $K$ , ki se dotika obeh premic in poteka skozi točko  $P$ .
68. Konstruiraj krožnico, ki se bo dotikala dane premice  $p$  in bo potekala skozi dani točki  $A$  in  $B$  na istem bregu premice  $p$ .
69. Znotraj kota z vrhom  $V$  sta dani točki  $M$  in  $N$ . Konstruiraj dve vzporedni premici, vsako skozi eno od danih točk, da bo razmerje dolžin odsekov premic znotraj danega kota enako 1:3.
70. Na krožnici  $K$  s središčem  $O$  in radijem  $R$  sta dani točki  $A$  in  $B$ . Razpolovišče daljice  $AB$  označimo s  $C'$ . Za poljubno točko  $C \in K$  označimo z  $G_C$  težišče trikotnika  $ABC$ . Dokaži, da točke  $G_C$ ,  $C \in K$ , ležijo na neki krožnici. Določi središče in radij te krožnice.
71. Dokaži: vsaka podobnostna transformacija je kompozitum izometrije in raztega.
72. Ugotovi, ali držijo naslednje trditve:
- Vsaka podobnostna transformacija preslika premico v premico.
  - Vsaka podobnostna transformacija preslika krožnico v krožnico.
  - Vsaka podobnostna transformacija preslika premico v vzporedno premico.
74. V dani trikotnik  $ABC$  včrtaj dve krožnici z enakima radijema, da se bo vsaka dotikala dveh stranic trikotnika in druge krožnice.

## Inverzija

75. Dani sta krožnici  $K_1$  in  $K_2$ , ki se sekata v točkah  $A$  in  $B$ , ter točka  $C$  na krožnici  $K_1$ . Opiši, kako bi konstruirali krožnico  $K$ , ki se dotika krožnice  $K_2$  in se dotika krožnice  $K_1$  v točki  $C$ . Nalogo reši:
- z uporabo inverzije glede na neko krožnico s središčem v točki  $C$ .
  - z uporabo inverzije glede na neko krožnico s središčem v točki  $B$ .
76. Dane so krožnica  $K$  in znotraj kroga, ki ga ta omejuje, dve točki  $A$  in  $B$ . Opiši, kako bi konstruirali krožnico  $L$ , ki poteka skozi točki  $A$  in  $B$  in se dotika krožnice  $K$ .
77. Krožnici  $K_1$  in  $K_2$  se dotikata od znotraj. Naj bo  $U$  poljubna točka med obema krožnicama. Opiši, kako bi konstruirali krožnico  $K_3$ , ki se dotika krožnic  $K_1$  in  $K_2$  ter poteka skozi točko  $U$ . Koliko rešitev ima ta naloga?
78. Opiši, kako bi konstruirali Paposovo verigo v arbelosu.
79. Na istem bregu premice  $p$  narišemo dve disjunktni krožnici  $K_1$  in  $K_2$ , ki se premice  $p$  dotikata v točkah  $A$  in  $B$ . Opiši, kako bi konstruirali krožnico  $L$ , ki se dotika premice in obeh krožnic.
80. Dan je trikotnik  $ABC$ . Določi množici točk  $S$ , za katere velja, da inverzija glede na neko krožnico s središčem  $S$  preslika nosilke stranic trikotnika  $ABC$
- v tri krožnice;
  - v tri krožnice z enakimi radiji.
81. Naj bo  $K_1$  trikotniku  $ABC$  včrtana krožnica.
- Konstruiraj krožnico  $K_2$ , ki se dotika krožnice  $K_1$  ter stranic  $c$  in  $b$  trikotnika  $ABC$ .
  - Konstruiraj krožnico  $K_2$ , ki se dotika krožnic  $K_1$  in  $K_2$  ter stranice  $c$ .
82. Dani so trikotnik  $ABC$ , krožnica  $K_1$ , ki se dotika stranice  $b$  v točki  $X$ , in točka  $Y \in K_1$ .
- Konstruiraj krožnico  $K_2$ , ki se dotika stranice  $a$  in se dotika krožnice  $K_1$  v točki  $Y$ .
  - Opiši, kako bi konstruirali krožnico  $K_3$ , ki se dotika stranice  $c$  in krožnic  $K_1$  in  $K_2$ .
83. Dana je daljica  $AB$  dolžine  $a$ , točka  $P$  in kot z vrhom v točki  $V$ . Konstruiraj premico  $p$  skozi točko  $P$ , ki kraka kota seka v točkah  $X$  in  $Y$  tako, da velja  $|PX| \cdot |PY| = a^2$ .
84. Krožnici  $K_1$  in  $K_2$  s središčema  $S_1$  in  $S_2$  se sekata v točkah  $A$  in  $B$ . Dokaži: inverzija  $I$  glede na krožnico s središčem v točki  $A$  in radijem  $R$  preslika nosilko  $n(S_1S_2)$  v krožnico s središčem  $B' = I(B)$ .