Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo

Izpit

Analitični pristopi v geometriji

Maribor, 27. 6. 2017

Razporeditev točk po nalogah: 20 + 20 (4 + 8 + 8) + 25 (15 + 10) + 35 (6+8+7+6+8).

Časa za reševanje je 120 minut.

1. V ravnini so dane točke $A(2,5)$, $B(2,1)$, $C(3,0)$ in $D(5,3)$. Določi in skiciraj množico K točk P v ravnini, za katere velja, da je (orientirana) ploščina trikotnika PAB enaka dvakratniku (orientirane) ploščine trikotnika PCD. Ali je za kak $P \in K$ trikotnik PAC pravokoten s pravim kotom pri oglišču P?

2. Dana je stožnica $\mathcal{S}$ z enačbo $4X^2 + 6XY + 11Y^2 + 2YZ - Z^2 = 0$.

   (a) Določi presečišča te stožnice s premico v neskončnosti in na tej podlagi ugotovi, za kateri tip stožnice gre.

   (b) Iz neke točke P v ravnini potegnemo dve tangenti na stožnico $\mathcal{S}$ z dotikališčema A in B. Nosilka daljice AB je premica z enačbo $2X + 7Y - Z = 0$. Določi koordinate točke P. Nalogo reši:

      i. ne da bi eksplicitno izračunali koordinate točk A in B;

      ii. z izračunom koordinat točk A in B.

3. V kompleksni ravnini so dane točke a, b, c, ki so oglišča trikotnika s koti α, β, γ.

   Z uporabo kompleksnih funkcij oblike $f_{u,d}(z) = uz + d$, $u, d \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, reši naslednji nalogi.

   (a) Zrcaljenje preko točke $d \in \mathbb{C}$ označimo z Z_d.
   Dokaži, da je kompozitum $Z_c \circ Z_b \circ Z_a$ spet zrcaljenje preko neke točke. Ali velja $Z_c \circ Z_b \circ Z_a = Z_a \circ Z_b \circ Z_c$?

   (b) Rotacijo okrog točke $d \in C$ za kot φ označimo z $\varrho(d, \varphi)$.
   Dokaži, da je tudi kompozitum $\varrho(c, \gamma) \circ \varrho(b, \beta) \circ \varrho(a, \alpha)$ zrcaljenje preko neke točke v kompleksni ravnini.

4. V ravnini so s pomočjo trilinearnih koordinat podane naslednje točke: $X_b = 0 : \frac{2}{b} : \frac{1}{c}$, $X_c = 0 : \frac{1}{b} : \frac{2}{c}$, $Y_a = \frac{2}{a} : 0 : \frac{1}{c}$, $Y_c = \frac{1}{a} : 0 : \frac{2}{c}$, $Z_a = \frac{2}{a} : \frac{1}{b} : 0$ in $Z_b = \frac{1}{a} : \frac{2}{b} : 0$.

   (a) Zapiši enačbe premic X_bY_a, Y_cZ_b in Z_aX_c.

   (b) Dokaži, da se te tri premice sekajo v skupni točki. Katera točka je to?

   (c) Dokaži: premica X_bY_a je vzporedna nosilki stranice c.

   (d) Na podlagi točk (b) in (c) opiši, kako bi konstruirali točke $X_b, X_c, Y_a, Y_c, Z_a, Z_b$.

   (e) Dokaži: omenjenih šest točk leži na stožnici z enačbo

$$2a^2\alpha^2 + 2b^2\beta^2 + 2c^2\gamma^2 - 5ab\alpha\beta - 5ac\alpha\gamma - 5bc\beta\gamma = 0.$$

   Kako bi torej v GeoGebri narisali stožnico s to enačbo?