

1 Klasična definicija verjetnosti

$$P(A) = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh izidov}}$$

Naloge:

1. Določi verjetnost dogodka, da pri šestih zaporednih metih kovanec vedno pade na isto stran.
 2. Kolikšna je verjetnost, da so vse številke v šestmestni telefonski številki različne? (Prva ne sme biti 0.)
 3. Kolikšna je verjetnost, da se pri n zaporednih metih kovanca m -krat ($m \leq n$) pojavi grb?
 4. Dobavitelj nam je v pošiljko 100 izdelkov podtaknil 10 pokvarjenih. Izračunaj kolikšna je verjetnost, da sta med petimi naključno izbranimi izdelki natanko dva pokvarjena.
 5. Hkrati vržemo modro in zeleno običajno igralni kocko. Kolikšna je verjetnost, da je vsota padlih pik
 - (a) enaka 8;
 - (b) manjša ali enaka 5?
 6. V pritličju desetnadstropne stolpnice stopijo v dvigalo štirje ljudje. Vsak z enako verjetnostjo izstopi v kateremkoli nadstropju. (Pri tem pritličja ne štejemo kot nadstropje.)
 - (a) Kolikšna je verjetnost, da nobena dva ne bosta izstopila v istem nadstropju?
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da je v tretjem nadstropju izstopila natanko ena oseba, če vemo, da so vsi skupaj izstopili v natanko treh nadstropjih?
 7. 10 različnih knjig razporedimo na ravno polico. Od tega so štirje romani. Kolikšna je verjetnost, da bodo stali skupaj?
 8. Imamo devetih različnih škatel s kroglicami: v štirih škatlah je po ena kroglica, v treh sta po dve kroglici in v dveh po štiri kroglice. Naključno izberemo 4 škatle. Kolikšna je verjetnost, da:
 - (a) je vsaj v treh izbranih škatlah enako število kroglic?
 - (b) je v izbranih škatlah skupaj 7 kroglic?
 9. Trije strelci hkrati ustrelijo v tarčo. Prvi jo zadene z verjetnostjo 0.4, drugi z verjetnostjo 0.5 in tretji z verjetnostjo 0.7. Kolikšna je verjetnost, da je tarča:
 - (a) vsaj enkrat zadeta?
 - (b) natanko enkrat zadeta?
 10. Streljamo na dvomotorni avion. Zrušimo ga, če zadenemo oba motorja ali pilotovo kabino. Verjetnosti za zadetke so: za 1. motor $\frac{1}{3}$, za 2. motor $\frac{1}{5}$ ter za pilotovo kabino $\frac{1}{7}$. Dogodki zadetkov so neodvisni. Določi verjetnost, da zrušimo avion.
 11. Leseno kocko, ki ima vse ploskve pobarvane z rdečo barvo, razžagamo na 1000 majhnih kockic enakih dimenzij. Dobljene kocke premešamo in damo v posodo. Izračunaj, kolikšna je verjetnost, da izvlečemo:
 - (a) kocko, ki ima pobarvani natanko dve ploskvi;
 - (b) kocko, ki ima pobarvano vsaj eno ploskev;
 - (c) dve kocki, od katerih ima vsaj ena vsaj eno ploskev pobarvano.
-

2 Geometrijska definicija verjetnosti

$$P(A) = \frac{\text{ploščina ugodnega dela}}{\text{ploščina celotnega dela}}$$

Naloge:

1. Kolikšna je verjetnost, da se točka na daljici AB nahaja bližje točki A kot B ?
2. Na poljubni daljici naključno izberemo dve točki. Kolikšna je verjetnost, da iz nastalih delov lahko tvorimo trikotnik?
3. Iz intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili x in y . Določi verjetnost, da velja:

$$x + y \leq 1 \text{ in } xy \leq \frac{2}{9}.$$

4. Iz intervala $[-1, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve števili x in y . Označimo dogodke:

$$A: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$B: |x| + |y| \geq 1.$$

Izračunaj verjetnost dogodkov A , B in AB .

5. Iz intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila x , y in z . Izračunaj, kolikšna je verjetnost, da za izbrana števila velja $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
6. Iz intervala $[0, 2]$ naključno in neodvisno izberemo števili a in b . Kolikšna je verjetnost, da ima enačba $x^2 + bx + a = 0$ kompleksni rešitvi?

3 Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(AB) = P(A)P(B)$. Dogodek A je neodvisen od B , če je $P(A|B) = P(A)$.

Naloge:

- V nekem razredu imajo učenci negativne ocene samo pri matematiki in nemščini. 20% ima negativno oceno iz matematike, 10% iz nemščine in 5% učencev iz obeh predmetov. Na slepo izberemo enega učenca.
 - Kolikšna je verjetnost, da ima ta učenec vsaj eno negativno oceno?
 - Kolikšna je verjetnost, da ima ta učenec negativno oceno iz matematike, če vemo, da ima negativno oceno iz nemščine?
- Na kvizu imamo 5 vprašanj tipa DA/NE. Kolikšna je verjetnost, da pravilno odgovorimo na vseh pet vprašanj, če vemo, da je:
 - na 4 vprašanja odgovor DA, na eno pa NE?
 - na 3 vprašanja odgovor DA, na dve pa NE?
- V posodi je 5 belih in 7 rdečih kroglic. Iz posode na slepo vlečemo kroglice eno za drugo in jih ne vračamo v posodo. Kolikšna je verjetnost, da so prve tri izvlečene kroglice bele?
- Na začetku imamo v posodi eno črno in eno beli kroglico. Iz posode vlečemo kroglice dokler ne izvlečemo črne. Če izvlečemo belo kroglico, jo vrnemo in dodamo še dve beli. Določi verjetnost, da v prvih 50 poskusih ne izvlečemo črne kroglice.
- Na 20 listkih imamo zapisane črke A, B, C in D. Na vsakem listku je napisana ena črka in vsaka se ponovi 5x. Listke damo v posodo in izvlečemo enega za drugim 4 listke.
 - Izvlačenih listkov ne vračamo nazaj. Po vrsti, kot smo jih izvlekli, jih položimo na mizo. Kolikšna je verjetnost, da so na mizi
 - 4 črke v abecednem redu?
 - sami A-ji?
 - Vsakič, ko izvlečemo listek, si zapišemo črko na njem in listek vrnemo nazaj. Kolikšna je verjetnost, da bomo imeli zapisane same A-je?
- Trgovka je dobila pošiljko 50 gospodinjskih aparatov. Odločila se je, da bo slučajno izbrala 3 in jih testirala. Če bo med njimi vsaj en pokvarjen, po pošiljko zavrnila. Kolikšna je verjetnost, da bo trgovka pošiljko zavrnila, če vemo, da so štirje aparati pokvarjeni?
- Imamo 5 ključev, od katerih samo eden odpira vrata. Ključev ne ločimo med seboj. Vrata odklepamo dokler nam ne uspe. Kolikšna je verjetnost, da smo vrata odprli v 4. poskusu?
- V bobnu imamo števila od 1 do $2n$. Iz bobna na slepo vlečemo 2 števili, dokler ni boben prazen. Kolikšna je verjetnost, da je vsak izvlečen par sestavljen iz enega sodega in enega lihega števila?
- Imamo 3 posode, v katerih so kroglice razporejene takole:

1. škatla	2. škatla	3. škatla
2 beli	2 beli	3 bele
3 črne	2 črni	1 črna

Iz prve v drugo posodo damo eno, nato pa iz druge v tretjo eno ter nazadnje iz tretje v prvo posodo eno kroglico. Katera sestava prve posode je najverjetnejša ko izvedemo opisani postopek?

4 Popolna verjetnost in Bayesov obrazec

Naj bo X poskus in $\{H_1, \dots, H_n\}$ popoln sistem dogodkov v X in A dogodek v X . Potem velja:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)$$

in

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}$$

Naloge:

1. Tri podjetja dobajajo trgovini enak izdelek v razmerju 1 : 2 : 6. Verjetnosti, da ima izdelek prvega, drugega in tretjega podjetja napako so po vrsti 0.4, 0.3 in 0.5. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrani izdelek brez napake? Kolikšna je verjetnost, da brehiben izdelek dobavlja drugo podjetje?
2. V 1. seriji imamo 90 brezhibnih in 10 pokvarjenih izdelkov, v 2. seriji 80 brezhibnih in 20 pokvarjenih izdelkov. Iz 1. serije na slepo izberemo en izdelek in ga prestavimo v 2. serijo, nato na slepo en izdelek iz 2. serije prestavimo v 1. serijo. Nazadnje na slepo izberemo proizvod iz 1. serije. Kolikšna je verjetnost, da je brezhiben?
3. V prvi posodi imamo 6 belih in 4 rdeče kroglice, v drugi pa dve beli in 7 rdečih kroglic. Iz prve posode v drugo prestavimo naključno izbrano kroglico in ko izvlečemo kroglico iz druge posode, je ta rdeče barve. Kolikšna je verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prestavili rdečo kroglico?
4. V prvi posodi imamo 3 črne in 4 bele kroglice, v drugi 2 črni in 6 belih, v tretji pa 5 črnih in 1 belo. Nato vržemo običajno igralno kocko. Če pade 1, izvlečemo eno kroglico iz prve posode. Če pade 2 ali 3 izvlečemo kroglico iz 2. posode. Sicer vlečemo kroglico iz 3. posode. Kolikšna je verjetnost, da je izvlečena kroglica črna?
5. V prvi posodi imamo 6 zelenih in 3 rumene kroglice, v drugi pa 3 zelene in 8 rumenih kroglic. Iz prve posode v drugo na slepo prenesemo dve kroglici, nato pa iz druge posode izvlečemo zeleno kroglico. Izračunaj verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prenesli kroglici različnih barv.
6. Dva igralca mečeta kocko. Prvi igralec jo vrže najprej enkrat, drugi pa tolikokrat, kolikor pik je vrgel prvi igralec. Kolikšna je verjetnost, da prvi igralec vrgel trojko, če je skupno število pik, ki jih je vrgel drugi igralec 4?
7. Zvečer damo v akvarij eno večjo in tri manjše ribe. Verjetnost, da ponoči večja riba poje manjšo, je $\frac{1}{2}$, verjetnost da poje dve je $\frac{1}{4}$, verjetnost da poje vse tri pa je $\frac{1}{8}$. Naslednje jutro iz akvarija na slepo potegnemo eno ribico. Kolikšna je verjetnost, da so v akvariju ostale še vse tri manjše ribice, če smo iz akvarija potegnili večjo ribico?

5 Diskretne naključne spremenljivke

Naloge:

1. Naključna spremenljivka X meri število padlih pik pri metu poštene igralne kocke. Določi verjetnostno funkcijo, porazdelitveno funkcijo ter matematično upanje naključne spremenljivke X .
2. Verjetnostna funkcija diskretne naključne spremenljivke X je podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Določi a tako, da bo X res diskretna naključna spremenljivka.
 - (b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$ naključne spremenljivke X .
 - (c) Zapiši porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ naključne spremenljivke X .
3. Verjetnostna funkcija diskretne naključne spremenljivke X je podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

- (a) Izračunaj matematično upanje $E(X)$ in disperzijo $D(X)$ naključne spremenljivke X .
 - (b) Določi verjetnostno funkcijo spremenljivke X^n , kjer je $n \in \mathbb{N}$.
4. Verjetnostna funkcija diskretne naključne spremenljivke X je podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ a & b & a & 2b & b \end{pmatrix}.$$

- (a) Določi a in b tako, da bo $E(X + 3b) = 2$.
 - (b) Izračunaj $D(X)$.
5. Na nekem testu je 6 vprašanj. Za vsako vprašanje so na voljo trije možni odgovori, od katerih je le eden pravilen. Študent je naključno obkrožil po en odgovor na vsako vprašanje. Vrednost naključne spremenljivke X je enaka številu pravih odgovorov študenta.
 - (a) Določi zalogo vrednosti naključne spremenljivke X .
 - (b) Zapiši verjetnostno funkcijo naključne spremenljivke X .
 - (c) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
 - (d) Kolikšna je verjetnost, da je študent vsaj na polovico vprašanj odgovoril pravilno?

6 Zvezne naključne spremenljivke

Naloge:

1. Določi število a tako, da bo funkcija

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2}; & x > 2, \\ 0; & x \leq 2 \end{cases}$$

gostota verjetnosti neke zvezne naključne spremenljivke X . Nato zapiši porazdelitveno funkcijo F_X naključne spremenljivke X in skiciraj njen graf.

2. Iz kroga s polmerom 1 naključno izberemo točko T . Vrednost naključne spremenljivke X je enaka oddaljenosti točke T od roba kroga (od krožnice).

- Določi zalogo vrednosti naključne spremenljivke X .
- Zapiši porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke X .
- Zapiši gostoto verjetnosti naključne spremenljivke X .
- Izračunaj $E(X)$.

3. Porazdelitvena funkcija zvezne naključne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x < 1, \\ ax^2 + bx; & 1 \leq x \leq 2, \\ 1; & x > 2. \end{cases}$$

- Določi konstanti a in b ter izračunaj gostoto verjetnosti naključne spremenljivke X .
- Zapiši porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke $Y = 2X - 1$.

4. Trajanje celovečernega filma v minutah je porazdeljeno po zakonu $N(95, 4)$. Kolikšna je verjetnost, da bo naključno izbrani celovečerni film trajal vsaj 92 in ne več kot 100 minut?

5. Znano je, da je teža kepice sladoleda S v gramih porazdeljena po zakonu $N(70, 6)$ in teža korneta K v gramih po zakonu $N(6, 3)$. Kolikšna je verjetnost, da bo imela porcija sladoleda T (kornet in dve kepici sladoleda) težo vsaj 140 gramov?

6. Naključno spremenljivko X , ki je porazdeljena binomsko po zakonu $b(n, p)$ aproksimiramo z normalno porazdelitvijo $N(60, 6)$.

- Določi parametra n in p .
- Kolikšna je ocena verjetnosti, da bo naključna spremenljivka X zavzela vrednost med 40 in 70?

7. Število avtomobilov na parkirišču trgovskega centra je porazdeljeno po zakonu $b(550, 0.7)$. Kolikšna je ocena verjetnosti, da bo na parkirišču natanko 400 avtomobilov?

8. Med ljudmi je 1% levičarjev. Kolikšna je ocena verjetnosti, da med 200 ljudmi ne bodo več kot trije levičarji?

9. Kocko vržemo 6000-krat. V katerih mejah glede na povprečje lahko z verjetnostjo 0.95 pričakujemo število padlih šestic?

7 Bernoullijevo zaporedje

Bernoullijevo zaporedje je zaporedje neodvisnih enakih poskusov.

- Verjetnost dogodka, da se v n ponovitvah poskusa dogodek A ($P(A) = p$) zgodi k -krat je:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Verjetnost, da se v n -ti ponovitvi poskusa dogodek A zgodi k -tič, je

$$\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Verjetnost, da se v n ponovitvah poskusa r dogodkov popolnega sistema dogodkov, katerih verjetnosti so p_1, \dots, p_r zgodi s frekvencami k_1, \dots, k_r je:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

Naloge:

1. Kateri izmed dogodkov je verjetnejši:
 - A: V petih metih običajne igralne kocke natanko dvakrat pade šestica.
 - B: V osmih metih običajne igralne kocke natanko trikrat pade šestica.
2. V tovarni igrač izdelujejo enako velike žoge v štirih barvah. Delež izdelanih zelenih žog je 10%, deleži izdelanih modrih, rdečih in rumenih žog pa so enaki. Stroj naključno izbere žogo, testira njeno odbojnost in jo vrne nazaj. Kolikšna je verjetnost, da je bilo med 14 izbranimi žogami 5 zelenih, 5 rdečih in 4 rumene?
3. Zakonca načrtujeta 4 otroke. Kateri izmed dogodkov je verjetnejši:
 - A: Oba spola bosta enako zastopana.
 - B: Trije otroci bodo enega, en otrok pa nasprotnega spola.
4. Šestkrat zapored si slučajno izberemo eno izmed naravnih števil od 1 do 15 in si izbrano število vsakič zapišemo na list. Kolikšna je verjetnost, da imamo na listu zapisanih liho sodih števil?
5. Dvanajstkrat zapored si slučajno izberemo eno izmed naravnih števil med 1 in 9 in si izbrano število vsakič zapišemo na list. Kolikšna je verjetnost, da:
 - (a) na listu nimamo zapisanih natanko dveh enk?
 - (b) bodo med zapisanimi števili natanko deljiva s 3?
6. Dve običajni igralni kocki vržemo desetkrat. Kolikšna je verjetnost, da je pri tem šestkrat padla vsota pik manjša ali enaka 5 in štirikrat vsota pik 8?
7. Imamo tri poštene igralne kocke, katerih ploskve so pobarvane s črno in belo barvo. Prva kocka ima eno, druga dve, tretja pa tri črne ploskve. Vse ostale ploskve kock so bele barve. Slučajno smo izbrali eno kocko ter jo vrgli sedemkrat. Pri tem je trikrat padla na črno in štirikrat na belo ploskev. Kolikšna je verjetnost, da je imela izbrana kocka le eno črno ploskev?
8. Katera frekvenca grbov je najbolj verjetna, če:
 - (a) kovanec vržemo sedemkrat?
 - (b) kovanec vržemo 120-krat?
9. Kolikokrat moramo istočasno vreči dva poštena kovanca, da lahko z verjetnostjo vsaj 0,99 trdimo, da bosta vsaj enkrat padli dve cifri?