

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Vaje - 11. sklop: Trigonometrične funkcije

Formule

1. Osnovne zveze:

$$(i) \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(ii) \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$(iii) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(iv) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. Formule za komplementarne kote:

$$(i) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$(ii) \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x, \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

3. Adicijski izreki:

$$(i) \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$(ii) \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$(iii) \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

4. Formule za računanje dvojnih kotov:

$$(i) \sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(ii) \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

5. Formule za računanje polovičnih kotov:

$$(i) \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$(ii) \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$(iii) \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

6. Formule za pretvarjanje produkta v vsoto:

$$(i) \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x + y) - \cos(x - y))$$

$$(ii) \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$(iii) \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

7. Formule za pretvarjanje vsote v produkt:

$$(i) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$(ii) \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$(iii) \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$(iv) \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Naloge na vajah

1. Dokaži, da je $(\sin x)' = \cos x$.
2. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.
 - (a) Za katere vrednosti spremenljivke x na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ velja neenakost $f(x) < 0$.
 - (b) Pokaži, da je funkcija f periodična in skiciraj njen graf.
3. Poišči osnovno periodo funkcije $f(x) = 2 \sin(3x) - 1$.
4. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \cos x - \sin x$.
 - (a) Zapis predpisa funkcije f preoblikuj tako, da bo v njem le funkcija sinus.
 - (b) Zapiši ničle funkcije f in točke, v katerih funkcija f doseže najmanjšo oziroma največjo vrednost ter nariši njen graf na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.
5. Ali je funkcija f , podana s predpisom $f(x) = |\tan(x - \frac{\pi}{2})|$, periodična? Če je, kakšna je njena osnovna perioda?
6. Dan je izraz $A = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin(2x)$.
 - (a) Pretvori izraz A v produkt.
 - (b) Za katere vrednosti parametra m ima enačba $A = m$ realne rešitve?
 - (c) Reši enačbo $A = \sqrt{2}$.
7. Reši enačbe:
 - (a) $3 \cos^2 x - \sin x \cos x = 2$
 - (b) $\cos x = 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
 - (c) $\sin^2 x = 2(\sin x \cos x + 1)$
 - (d) $\sin x + 2 \cos x = 1$
 - (e) $\cos x + \cos(7x) + \cos(4x) = 0$
8. Reši neenačbi:
 - (a) $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0$
 - (b) $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2(2x) > \cos(2x)$
9. Izrazi funkcijo $\arctan x$ s funkcijo \arcsin .
10. Naj bo $f(x) = \cos(\arcsin x)$. Izrazi funkcijo f brez krožnih in trigonometričnih funkcij.
11. Skiciraj grafa funkcij:
 - (a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$
 - (b) $g(x) = \arcsin(\sin x)$
12. Reši enačbo
$$\arcsin x + \arccos(2x) = \frac{\pi}{6}.$$

Domače naloge

1. Reši enačbe:

a) $3 \sin x - \sin^2 x = \cos(2x) + 3.$

b) $\sin x \cdot \sin(3x) = \sin(5x) \cdot \sin(7x).$

c) $\arccos(\cos(-\frac{5\pi}{4})) = x.$

(d) $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$

2. Dokaži, da za vsako realno število $x \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ velja enakost

$$\frac{2}{1 - \sin x} = \tan^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 1.$$

3. Reši enačbo

$$\sin x + 2 \cos x + 2 = 0.$$

4. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{2 \sin x + \tan x}{\sin x}.$$

a) Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene ničle.

b) Ugotovi, ali je f liha oz. soda.

c) Ugotovi, ali funkcija f v točki z absciso $x = \frac{\pi}{4}$ pada oz. narašča.

5. Reši enačbe oz. neenačbe:

(a) $\frac{1}{2} \cos x - \sin^2 x \cos x = 0,$

(b) $2 \cos^2 x + \sin(2x) = 2,$

(c) $\sin(2x) - \cos(\frac{x}{2}) = 0.$

6. Reši enačbo

$$\sin(2x) - \cos(3x) = 0.$$

7. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x.$$

(a) Predpis funkcije f preoblikuj tako, da bo oblike $f(x) = A \sin(wx + \varphi)$, kjer so A, w, φ neka realna števila.

(b) Za funkcijo f določi definicijsko območje, ničle ter osnovno periodo. Poišči tudi intervale naraščanja in padanja ter klasificiraj stacionarne točke. Določi še intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter njene prevoje.

(c) Skiciraj graf funkcije f in zapiši njeno zalogo vrednosti.

8. Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x) = -1.$$

9. Nariši grafa funkcij:

(a) $f(x) = \tan(\arctan(x)),$

(b) $g(x) = \arctan(\tan(x)).$