

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Vaje - 12. sklop: Eksponentna in logaritemska funkcija

Naloge na vajah

- Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} + 1$.
 - Izračunaj presečišča grafa funkcije f z obema koordinatnima osema. Nato dokaži, da je funkcija pozitivna, zapiši enačbo vodoravne asimptote in nariši njen graf.
 - Nariši graf funkcije $g : x \mapsto f(|x|)$ in določi zalogo vrednosti te funkcije.
- Reši neenačbo $3^{x-1} > 5^{x-1}$ in skiciraj graf funkcije $f(x) = 3^{x-1} - 3^{x-2} - 4 \cdot 3^{x-3}$.
- Graf funkcije $f(x) = ae^{bx}$ poteka skozi točki $A(2, 10)$ in $B(8, 80)$. Izračunaj a in b .
- Reši enačbi
 - $2^{3x+1} + 2^{2x+1} = 6 \cdot 2^{x+1}$
 - $2^{3-2x} - 9 \cdot 2^{1-x} + 4 = 0$
- Reši neenačbe
 - $2^{x^2-5x+10} < 16$
 - $2^{x^2} > \frac{1}{4}(2^x)^3$
 - $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- Reši sistem
 - $3^{2x} - 2^y = 65, 3^x + 2^{\frac{y}{2}} = 13$
 - $x^2y = y^x, x^3 = y^2$
- Dokaži formulo za prehod na novo osnovo logaritma.
- Izračunaj
 - $\log_{a+b}(10a^3 + 30a^2b + 30ab^2 + 10b^3)$
 - $3 \log_8 96 - \frac{1}{\log_3 2}$
- Reši enačbe
 - $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 1 + \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
 - $8x = x^{\log_8 x^{12}}$
 - $\log(x+3) + \log(x+1) = \frac{1}{\log_2 10}$
 - $1 + \log(1+x^2-2x) = \log(1+x^2) + 2 \log(1-x)$
 - $(\log x)^x = 1$
- Graf funkcije $f(x) = -2 \log_5 x + 2$ vzporedno premakni tako tako, da se bo točka $T(1, 2)$ preslikala v točko $P(-1, 1)$. Zapiši enačbo dobljene funkcije in nariši njen graf.
- Določi konstanto n , da bo točka $A(3, y)$ presečišče grafov $y = -\frac{1}{3}x + n$ in $y = \log_2(x+1) - 1$. Za obe funkciji poišči tudi inverzni funkciji.

12. Ugotovi, ali je f soda oziroma liha

(a) $f(x) = \frac{x}{a^x - 1}$

(b) $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$

(c) $f(x) = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$

13. S pomočjo odvoda skiciraj graf funkcije $f(x) = \ln(\cos x)$.

Domače naloge

1. Določi definicijsko območje funkcije $\sqrt{\log(1 - x - x^2)}$.

2. Nariši grafa funkcij $f(x) = \ln(x)$ in $g(x) = 2 + \ln(x + 3)$. Določi vzporednico osi y , tako da bo sekala grafa v točkah, medsebojno oddaljenih za 3 enote.

3. Reši neenačbo

(a) $\log |3x + 1| < 1$

(b) $\frac{1}{1 + \ln x} + \frac{1}{1 - \ln x} > 2$

4. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = |\ln(x) - 2| + |\ln(x) - 3|.$$

a) Določi definicijsko območje funkcije f , zapiši funkcijo f brez znakov za absolutno vrednost in skiciraj njen graf.

b) S pomočjo narisane grafa reši neenačbo $f(x) > 1$.

c) Ali je funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana? Odgovor utemelji!

5. Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene ničle.

b) Izračunaj in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f ter določi intervale naraščanja in padanja.

c) Skiciraj graf funkcije f in zapiši njeno zalogo vrednosti.

d) Reši neenačbo $|f(x)| < \ln 5$.

6. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soda in $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liha funkcija. Ali je funkcija $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$h(x) = f(x) + \frac{(g(x) - f(x))^2}{2} + g(x)f(x)$$

soda oz. liha?

7. Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tako da velja tudi $c + b, c - b, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Dokaži, da je trikotnik s stranicami a, b, c , ki zadoščajo enakosti $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$, pravokoten.

8. Glede na parameter $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ obravnavaj in reši neenačbo

$$\log_a \left(\frac{2x + 1}{x - 3} \right) > 0.$$

9. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

- (a) Za funkcijo f določi definicijsko območje, ničle in navpične asimptote. Izračunaj tudi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (b) Določi intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f . Poišči tudi stacionarne točke in jih klasificiraj.
- (c) Skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.