

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Vaje - 3. sklop: Realna števila

Naloge na vajah

1. Naj bo p praštevilo. Dokaži, da je \sqrt{p} iracionalno število.
2. Dokaži, da je število $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalno.
3. Naj bo q neničelno racionalno število, x in y pa naj bosta iracionalni števili in naj velja $x > 0$.
 - (a) Dokaži, da so števila \sqrt{x} , $q + x$ in qx iracionalna.
 - (b) Ali lahko kaj podobnega poveš o številih $x + y$, xy in \sqrt{q} ?
4. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum naslednjih množic, če obstajajo.
 - (a) $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$
 - (b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 5\} \subseteq \mathbb{R}$
 - (c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\} \subseteq \mathbb{R}$
 - (d) $D = \{\frac{2n-3}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - (e) $E = \{\frac{2}{1+x^2} - 1 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$
 - (f) $F = \{x \in [0, 1] \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki}\} \subseteq \mathbb{R}$

5. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Skiciraj graf funkcije f .
- (b) Ugotovi, ali je f injektivna oziroma surjektivna.
- (c) Določi minimume, maksimume, supremume in infimume (če obstajajo) množic Z_f , $f((-1, 1))$, $f([-1, 0))$, $f((-\infty, 0])$, $f([0, 1])$, $f^{-1}((-1, 1))$.

Domače naloge

1. Dokaži, da je število $\log_2 3$ iracionalno.
2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je število \sqrt{n} bodisi naravno bodisi iracionalno.
3. Naj bosta p in q različni praštevili. Dokaži, da je število \sqrt{pq} iracionalno.
4. Podana je množica $A = \{\frac{3n+1}{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Določi minimum, maksimum, infimum in supremum množice A (če obstajajo) in vse odgovore utemelji z dokazi!
5. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum naslednjih množic, če obstajajo.
 - (a) $A = \{x^2 - 6x \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}$
 - (b) $B = \{x^2 + x \mid x \in (-1, 1)\}$

(c) $C = \left\{ \frac{m-2m^2}{m^2+4} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$

6. Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dane so množice $A = f([3, \infty))$, $B = f^{-1}([-2, 4])$ in $C = f\left(\left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

(a) Zapiši in skiciraj množici A in B v \mathbb{R} .

(b) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic A , B in C . Odgovor za infimum množice C tudi dokaži.

7. Naj bo $f : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f((x, y)) = x + y$.

(a) Skiciraj množico $A = [0, 1) \times [0, 1)$ v ravnini \mathbb{R}^2 in množico $f(A)$ na realni osi.

(b) Določi množici $f^{-1}([2, \infty))$, in $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ in ju skiciraj v \mathbb{R}^2 .

(c) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic $A = f\left(\left(0, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ in $B = f\left(\left\{\left(-\frac{n}{n+1}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$.