

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Vaje - 9. sklop: Limita in zveznost funkcije

Naloge na vajah

- Po definiciji dokaži, da je $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.
- S pomočjo definicije dokaži, da je

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty.$$

- Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$, $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}^+$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

- Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|}, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Določi a tako, da bo f zvezna na celotnem definicijskem območju.

- Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{x-1}, & x < -1 \\ bx - 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \end{cases}.$$

Določi števili a in b tako, da bo f zvezna na celotnem definicijskem območju.

Domače naloge

- Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ in resničnost odgovora dokaži s pomočjo definicije.
- Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}$ in resničnost odgovora dokaži s pomočjo definicije.
- S pomočjo definicije dokaži, da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

4. Ugotovi, koliko je

$$\lim_{x \downarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

in odgovor dokaži s pomočjo definicije!

5. Naj bo f funkcija s predpisom

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

- (a) Za funkcijo f določi naravno definicijsko območje, ničle, pole, asimptote in skiciraj njen graf.
- (b) Določi limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \uparrow -2} f(x), \lim_{x \downarrow -2} f(x)$$

6. Izračunaj limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1} - 1} \text{ in } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

7. Izračunaj limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{5x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

8. Izračunaj limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) \text{ in } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

9. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x+8}{x+2}, & x < -2 \\ 8x + 18, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+9}-3}, & x > 0 \end{cases}.$$

Ugotovi, ali je funkcija f zvezna v vsaki točki definicijskega območja. Vse sklepe utemelji!