

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo

## Pisni izpit iz ALGEBRE

14. 2. 2017

1. [25] Izračunaj vse možne vrednosti  $x, y \in \mathbb{Z}$ , za katera bo ostanek števila  $18x + 14y$  po deljenju s 63 enak 5.

2. [20] Naj bo  $(G, \cdot)$  Abelova grupa in  $H$  podgrupa grupe  $G$ . Vpeljimo množico

$$H' = \{x \in G \mid x^2 \in H\}.$$

Dokaži, da je  $H'$  podgrupa grupe  $G$ . Ali je  $H'$  edinka v grupi  $G$ ? Odgovor utemelji.

3. [30] Naj bo  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  in  $\circ : G \times G \rightarrow G$  binarna operacija, definirana kot

$$(a, b) \circ (c, d) = (a + c, (-1)^c b + d)$$

za vse  $(a, b), (c, d) \in G$ . Par  $(G, \circ)$  je grupa.

(a) Ugotovi, kaj je enota v grupi  $G$  in zapiši inverz elementa  $(a, b) \in G$ .

(b) Dokaži, da je množica  $N = \{(0, d) \mid d \in \mathbb{Z}\}$  edinka v grupi  $G$  in da je grupa  $G/N$  neskončna ciklična grupa.

4. [25] Izračunaj vse možne vrednosti  $c \in \mathbb{Z}_3$ , za katere je faktorski kolobar

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + cx^2 + 1)$$

polje. Oznaka  $(x^3 + cx^2 + 1)$  predstavlja ideal, generiran s polinomom  $x^3 + cx^2 + 1$ .

Čas reševanja: 120 minut.