Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo

Pisni izpit iz ALGEBRE

30. 1. 2017

realnih

1. [25] Določi vse možne trojice kompleksnih števil x_1, x_2, x_3, ki zadoščajo enakostim

$$\begin{aligned} x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 &= 6 - 3x_1x_2x_3, \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 &= 4, \\ x_1^2x_2^2x_3^2 + 2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3. \end{aligned}$$

2. [20] Naj bo red elementa a grupe G enak m, red elementa b grupe H pa n. Dokaži, da je red elementa $(a, b) \in G \times H$ enak najmanjšemu skupnemu večkratniku števil m in n.

3. [30] Za $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, naj bo preslikava $\mathcal{L}_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $\mathcal{L}_{a,b}(x) = ax + b$. Vpeljimo množico $G = \{\mathcal{L}_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.
   (a) Dokaži, da je G grupa za operacijo kompozituma preslikav.
   (b) Dokaži, da je $N = \{\mathcal{L}_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ edinka v grupi G in da je grupa G/N izomorfna grupi $\mathbb{R}^*$ z operacijo množenja.

4. [25] Naj bo K kolobar vseh zgoraj trikotnih realnih matrik velikosti 2×2 in I množica vseh strogo zgoraj trikotnih realnih matrik velikosti 2×2.
   (a) Dokaži, da je I ideal kolobarja K. 10
   (b) Ali je I ideal kolobarja $M_2(\mathbb{R})$? Odgovor utemelji. 5
   (c) Dokaži, da je $K/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 10

Čas reševanja: 120 minut.