Metrični prostori

Naloge na vajah:

Primeri metrik na $\mathbb{R}$

1. S katerim od predpisov je definirana metrika na $\mathbb{R}$:

   (a) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$;

   (b) $d(x,y) = \max\{1, |x-y|\}$;

   (c) $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$;

   (d) $d(x,y) = \left|\arctan \frac{2x}{1+x^2} - \arctan \frac{2y}{1+y^2}\right|$.

2. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Definirajmo preslikavo $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)| .$$

   (a) Kateremu pogoju zadošča funkcija f, da je d metrika?

   (b) Za $f(x) = \arctan x$ v metričnem prostoru $(\mathbb{R}, d_f)$ skiciraj krogli $K_{\frac{\pi}{2}}(0)$ in $K_{\frac{\pi}{4}}(0)$. Ali je metrični prostor $(\mathbb{R}, d_f)$ omejen?

3. Ali je s predpisom:

   (a) (a) iz prve naloge definirana metrika na množici pozitivnih realnih števil;

   (b) (d) iz prve naloge definirana metrika na intervalu $[2, \infty)$?

4. Naj bo $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ zvezna funkcija. Za poljubni števili $a, b \in \mathbb{R}$ definiramo

$$d(a,b) = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| .$$

   Dokaži, da je d metrika na $\mathbb{R}$ in opiši kroglo $K_1(0)$.

Primeri metrik na $\mathbb{R}^2$

5. Naj bodo d_1, d_2, in d_∞ običajne metrike na $\mathbb{R}^2$.

   (a) V posamezni metriki skiciraj $K_1((0,0))$.

   (b) V posamezni metriki izračunaj oddaljenost premice $y = -2x + 2$ od točke $T(0,0)$.

6. V metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d_1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ skiciraj parabolo, to je množico točk, ki so enako oddaljene od točke $T(0,p)$ in premice $y = -p$, kjer je $p > 0$.

7. Naj bosta T_1 in T_2 poljubni točki ravnine $\mathbb{R}^2$. Dokaži, da je s predpisom

$$D(T_1, T_2) = \begin{cases} d_2(T_1, T_2) & ; T_1 \text{ in } T_2 \text{ sta na istem poltraku skozi } (0,0) \\ d_2(T_1, 0) + d_2(0, T_2) & ; T_1 \text{ in } T_2 \text{ nista na istem poltraku skozi } (0,0) \end{cases}$$

   definirana "poštarska" metrika na ravnini in skiciraj odprti krogli s središčem v točki $T(3,4)$ in radijem $r = 1$ oziroma $r = 6$.

8. Naj bo $(\mathbb{R}, d)$ omejen metrični prostor z diametrom ε in $(\mathbb{R}, D)$ poljuben metrični prostor. Dokaži, da je s predpisom

$$\Delta((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d(x_1, x_2) & ; y_1 = y_2 \\ \varepsilon + D(y_1, y_2) & ; y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

   definirana metrika na množici $\mathbb{R}^2$.

9. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realni funkciji. Definirajmo preslikavo $d_{f,g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$d_{f,g}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |f(x_1) - f(x_2)| + |g(y_1) - g(y_2)| \ .$$

   (a) Kateremu pogoju morata zadoščati f in g, da bo d metrika na $\mathbb{R}^2$?

   (b) Za funkciji $f(x) = \arctan x$ in $g(x) = \frac{1}{2}x$ v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d_{f,g})$ skiciraj odprti krogli $K_1(0,0)$ in $K_{\frac{\pi}{2}}(0,0)$.

Primeri funkcijskih metrik

10. Naj bo M množica vseh realnih zaporedij, t.j. $M = \{a = (a_1, a_2, \ldots); a_i \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Dokaži, da je s predpisom

$$D(a,b) = \begin{cases} 0 \ ; & a = b \\ \frac{1}{n} \ ; & a_1 = b_1, \cdots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n \neq b_n \end{cases}$$

   definirana "primerjalna" metrika na M.

   (b) Opiši naslednje množice $K_{\frac{1}{2}}(0)$, $\overline{K}_{\frac{1}{2}}(0)$, $K_{\frac{\pi}{4}}(0)$, $S_{\frac{1}{2}}(0)$.

(c) Dokaži: če je $b \in K_r(a)$, potem je $K_r(a) = K_r(b)$.

11. Naj bo $C^1[a,b]$ množica zvezno odvedljivih realnih funkcij na intervalu $[a,b]$. S katerim od naslednjih predpisov je definirana metrika na $C^1[a,b]$:

    (a) $d(f,g) = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \right|$;

    (b) $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$;

    (c) $d(f,g) = \int_a^b |f(x) + f'(x) - g(x) - g'(x)|\, dx$.

12. Naj bodo $C(\mathbb{R})$ vse zvezne realne funkcije in $P(\mathbb{R})$ realni polinomi. Ali je s predpisom

$$D(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

definirana metrika na $C(\mathbb{R})$ oziroma $P(\mathbb{R})$?

13. Naj bo $C[a,b]$ množica zveznih realnih funkcij na intervalu $[a,b]$. Na množici $C[a,b]$ definirajmo naslednje metrike:

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{za } p \geq 1,$$
$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

    (a) Koliko je razdalja funkcij $f(x) = e^x$ in $g(x) = -e^x$ v metričnem prostoru $(C[0,1], d_p)$.

    (b) V metriki d_∞ opiši in skiciraj odprto in zaprto kroglo ter sfero s središčem v funkciji f in polmerom $r = 1$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 80, 82, 85], [3, Naloge: 150, 154 , 155] in [6, Naloge: 2:1, 2:2, 2:3].

Podmnožice metričnih prostorov

Naloge na vajah:

1. Določi notranjost, zunanjost in mejo podmnožic $\mathbb{R}$: $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$, $[-1, 2)$ in $\mathbb{Q}$ v evklidski metriki in v diskretni metriki.

2. Naj bo $K = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Določi $\operatorname{Not} K$, $\operatorname{Meja} K$ in $\operatorname{Zun} K$ v d_2, d_1 in poštarski metriki. Ali je K v teh metričnih prostorih odprta ali zaprta množica.

3. Naj bo $C[0,1]$ metrični prostor zveznih funkcij na intervalu $[0,1]$ z "max" metriko. Določi notranjost, zunanjost in mejo množic

$$A = \{f \in C[0,1] \,|\, f(0) = 0\} \quad \text{in} \quad B = \{f \in C[0,1] \,|\, f(0) < 0\}.$$

   Ali je katera od množic odprta oz. zaprta?

4. Naj bo (M, d) metrični prostor in $A, B \subseteq M$. Dokaži ali ovrzi:

   (a) $\operatorname{Not}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Not} A \cup \operatorname{Not} B$;

   (b) $\operatorname{Not} A \cup \operatorname{Not} B \subseteq \operatorname{Not}(A \cup B)$;

   (c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   (d) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

5. Ali v metričnem prostoru M velja katera od trditev:

   (a) Če sta A in B zaprti podmnožici M, potem je $A \backslash B$ zaprta.

   (b) Če je A odprta in B zaprta podmnožica M, potem je $A \backslash B$ odprta.

   (c) Če je $A \subseteq B$, potem je $\operatorname{Meja} A \subseteq \operatorname{Meja} B$.

6. Naj bo $A \subseteq M$. Dokaži ali ovrzi:

   (a) $\overline{A} \cap A^C = \emptyset$;

   (b) $\operatorname{Meja} \overline{A} = \operatorname{Meja} A$;

   (c) $\operatorname{Meja} \overline{A} \cap \operatorname{Meja} A = \emptyset$.

7. Dokaži. Podmnožica A metričnega prostora M je odprta natanko tedaj, ko obstaja družina odprtih krogel $\mathcal{B} = \{B_\lambda \,|B_\lambda = \operatorname{Not} B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, da je $A = \cup\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$

8. Naj bo $M = C\,[0,1]$ metrični prostor zveznih funkcij na intervalu $[0,1]$ z "max" metriko in A podmnožica vseh polinomov. Določo $\operatorname{Not} A$, $\operatorname{Meja} A$ in $\operatorname{Zun} A$.

9. Naj bo l^∞ množica vseh omejenih realnih zaporedij z d_∞ metriko. Naj bo A podmnožica vseh konvergentnih zaporedij, ki konvergirajo proti 0 in B podmnožica zaporedij, ki imajo končno mnogo členov različnih od 0. Določi notranjost, zunanjost in mejo obeh podmnožic. Ali je katera od množic odprta oziroma zaprta.

Samostojno reši: [1, Naloge: 96, 98, 100], [3, Naloge: 159, 161 , 164] in [6, Naloge: 11:4, 11:5, 11:11].

Norma in skalarni produkt

Naloge na vajah:

1. (a) Katere metrike porodijo p-te norme na $\mathbb{R}^n$, t.j.

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{oziroma} \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}\,?$$

Dokaži $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

(b) Katere metrike porodijo p-te norme na $C[0,1]$, t.j.

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{oziroma} \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

2. Kdaj je metrika porojena iz norme? Ali poštarska metrika izhaja iz norme?

3. Naj bo l^∞ množica realnih oz. kompleksnih omejenih zaporedij. Dokaži, da je s predpisom $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ definirana norma na množici l^∞.

4. (a) Katero normo porodi skalarni produkt $\langle x\,|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ na $\mathbb{R}^n$?

(b) Katero normo porodi skalarni produkt $\langle f\,|g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ na $C[0,1]$?

5. Kakšnemu pogoju zadoščajo števila a_i za $i = 1, 2, ..., n$, da bo s predpisom $\langle x\,|y\rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$ definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$?

6. Kakšnemu pogoju zadošča funkcija $u(x)$, da bo s predpisom

$$\langle f\,|g\rangle = \int_0^1 u(x)\, f(x)\, g(x)\, dx$$

definiran skalarni produkt na $C[0,1]$?

7. Kdaj je norma porojena iz skalarnega produkta? Ali je norma $\|.\|_1$ na $\mathbb{R}^2$ porojena iz skalarnega produkta?

8. Zapiši neenakost CSB v $\mathbb{R}^n$ oz. $\mathbb{C}^n$ opremljenim z običajnim skalarnim produktom.

9. Naj $l^2 = \left\{(x_1, x_2, \cdots)\,\middle|\, \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\right\}$ množica realnih oz kompleksnih zaporedij.

(a) Dokaži, da je l^2 vektorski prostor.

(b) Dokaži, da je s predpisom $\langle x\,|y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$ oz. $\langle x\,|y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}$ definiran skalarni produkt na l^2.

(c) Katero normo porodi ta skalarni produkt?

Samostojno reši: [3, Naloge: 440, 441 , 442] in [6, Naloge: 2:4, 2:7, 3:3].

Zaporedja v metričnih prostorih

Naloge na vajah:

1. Dokaži, da je v metričnem prostoru vsako konvergentno zaporedje tudi Cauchyjevo. S primerom pokaži, da obratna trditev ne velja.

2. V $\mathbb{R}^2$ je podano zaporedje $x_n = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Ali je zaporedje (x_n) konvergentno (Cauchyjevo) v metričnem prostoru $\mathbb{R}^2$ z d_2 metriko oz. z d_{PTT} metriko?

3. Poišči vsa stekališča zaporedja $x_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \cos\frac{n\pi}{2}\right)$ v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d_2)$ in $(\mathbb{R}^2, d_{PTT})$.

4. Naj bo M množica realnih omejenih zaporedij. Naj bodo podana naslednja zaporedja v M :

   zaporedje (x^n) kot $x^n = (1, 2, \cdots, n, 0, \cdots)$;

   zaporedje (y^n) kot $y^n = (0, 0, \cdots, 0, n, 0, \cdots)$;

   zaporedje (z^n) kot $z^n = \left(\frac{1}{n}, 0, \cdots\right)$.

   Ali so ta zaporedja konvergentna (Cauchyjeva) v metričnem prostoru M s primerjalno oz. supremum (d_∞) metriko?

5. Naj bo A podmnožica metričnega prostora M in $a \in \operatorname{Meja} A$. Dokaži, da obstaja tako zaporedje (a_n) iz množice A, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

6. Naj v metričnem prostoru M zaporedji (a_n) in (b_n) konvergirata proti $a \in M$. Dokaži, da je potem $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$.

7. Označimo z $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Naj bo $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ injektivna odvedljiva funkcija z omejenim odvodom. Potem $\mathbb{R}^+$ postane metrični prostor z metriko $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Naj bo $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ Cauchyjevo zaporedje. Dokaži, da je (x_n) Cauchyjevo zaporedje tudi metričnem prostoru $(\mathbb{R}^+, d_f)$.

   (b) Naj bo $f(x) = \frac{x}{1+x}$. V metričnem prostoru $(\mathbb{R}^+, d_f)$ konstruiraj Cauchyjevo zaporedje, ki ne konvergira.

8. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Definirajmo preslikavo $d_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| .$$

(a) Kateremu pogoju zadošča funkcija f, da je $(\mathbb{R}, d_f)$ poln metrični prostor?

(b) Ali je $(\mathbb{R}, d)$ polni metrični prostor, če je $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$?

9. Ali je prostor omejenih realnih zaporedij s primerjalno metriko poln?

10. Naj bo $P = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,|a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ metrični prostor polinomov z metriko

$$d(p, q) = \sum_{i=0}^{n} |a_i - b_i| .$$

Ali je ta metrični prostor poln? Oglej si zaporedje $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{2^n}$.

Samostojno reši: [6, Naloge: 7:2, 7:3, 7:8].

Zvezne preslikave

Naloge na vajah:

1. Definirajmo preslikavi $f, g : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d_{PTT})$ s predpisom $f(x) = (x, x)$ in $g(x) = (x, 1)$. V katerih točkah sta ti preslikavi zvezni?

2. Definirajmo funkcijo $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}, d_e)$ oz. $F : (C[0,1], d_1) \to (\mathbb{R}, d_e)$ s predpisom $F(f) = f(0)$. Ali je funkcija F zvezna? Ali je F enakomerno zvezna?

3. Naj bo preslikava $F : (C[0,1], d_\infty) \to (l^\infty, d_\infty)$ definirana s predpisom

$$F(f) = \left(f(1), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{3}\right), \ldots\right). \tag{1.1}$$

   Ali je preslikava F zvezna?

4. Ali je preslikava $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, D)$, ki je definirana s predpisom (1.1), zvezna, če je D primerjalna metrika $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

5. Naj bosta $f, g : M \to M'$ zvezni preslikavi. Dokaži, da sta množici

$$A = \{x \in M \,|\, f(x) = c \in M'\} \quad \text{in} \quad B = \{x \in M \,|\, f(x) = g(x)\}$$

   zaprti.

6. Naj bo $C(I)$ metrični prostor zveznih funkcij na intervalu $I = [0,1]$ z d_∞ metriko t.j. $d_\infty(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$. Definirajmo preslikavi $F : C(I) \to \mathbb{R}$ in $G : C(I) \to C(I)$ s predpisoma

$$F(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx \quad \text{in} \quad G(f) = x^2 f(x)^2 .$$

   Ali sta omenjeni preslikavi zvezni? Ali je katera Lipschizova?

Banachovo skrčitveno načelo

7. Naj bo $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ metrični prostor z evklidsko metriko in $f(x) = \frac{1}{2}x$. Ali je f skrčitev? Ali ima f kakšno fiksno točko v tem metričnem prostoru? Ugotovitve poveži z Banachovim skrčitvenim načelom.

8. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s predpisom $f(x, y) = \left(y - 1, \frac{1}{2}(x + y)\right)$. Dokaži, da ne obstaja taka zaprta podmnožica D, da bi bila $f : D \to D$ skrčitev.

9. Naj bo $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Dokaži, da velja:

(a) $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$;

(b) $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ za vsaka $x, y \in [1, \infty)$;

(c) f nima fiksne točke.

Ugotovitve poveži z Banachovim skrčitvenim načelom.

10. S pomočjo Banachovega skrčitvenega načela poišči rešitve enačbe $x = \ln x + \pi$.

Samostojno reši: [3, Naloge: 165, 166, 168], [6, Naloge: 4:2, 4:4, 4:10].

Kompaktni metrični prostori

Naloge na vajah:

1. Dokaži, da je vsak kompakteni metrični prostor poln.

2. Ali je množica $[-1, 1] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$ kompaktna v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d_2)$ oz. $(\mathbb{R}^2, d_{PTT})$?

3. Dokaži, da je zaprta podmnožica kompaktne množice kompaktna.

4. Naj bosta A in B kompaktni in C podmnožica metričnega prostora M. Dokaži ali ovrzi:

   (a) $A \cup B$ je zaprta množica;

   (b) če je C zaprta, je $A \cap C$ kompaktna množica;

   (c) če je $A \cap C$ kompaktna, je C zaprta množica.

5. Naj bo (x_n) konvergentno zaporedje z limito x v metričnem prostoru M. Ali je katera od množic $A = \{x_n \,|n \in \mathbb{N}\}$, $B = A \cup \{x\}$ kompaktna?

6. Katere množice so kompaktne v diskretnem metričnem prostoru?

7. Naj bo M kompaktni metrični prostor in $f, g : M \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji z lastnostjo $f(x) \neq g(x)$ za vsak $x \in M$. Dokaži, da obstaja taka konstanta $c > 0$, da je $|f(x) - g(x)| \geq c$ za vsak $x \in M$.

Samostojno reši: [6, Naloge: 12:1, 12:3, 12:5].