Funkcije več spremenljivk

Naloge na vajah:

Nivojnice in definicijsko območje

1. Poišči in skiciraj definicijsko območje funkcij

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)} \quad \text{in} \quad g(x,y) = \ln(x \ln(y - x)) \ .$$

2. S pomočjo nivojnic skiciraj grafa funkcij

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{in} \quad g(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \ .$$

3. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Graf funkcije f predstavi z nivojnicami in skiciraj prerez grafa nad ravnino $z = 0$.

4. Naj bo funkcija f podana spredpisom

$$f(x,y) = \arcsin\left(2y\left(1 - x^2\right) - 1\right) \ .$$

   (a) Poišči in skiciraj definicijsko območje funkcije f.

   (b) Graf funkcije f predstavi s pomočjo nivojnic. Nariši nivojnice $N_{-\frac{\pi}{2}}$, N_0, $N_{\frac{\pi}{2}}$ ter nakaži trend pri nivojnicah N_a za $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

5. Dana je funkcija $f(x,y) = y(x^2 - 1)$.

   (a) Graf funkcije f predstavi s pomočjo nivojnic.

   (b) Skiciraj prerez grafa nad premico, ki poteka skozi točki $A(-2,1)$ in $B(2,-1)$.

(c) Kako bi po grafu funkcije f prišel iz točke $A'(-2,1,3)$ v točko $B'(2,-1,-3)$, da se med potjo ne bi nikdar vzpenjal.

Krivulje v polarnih koordinatah

6. V ravnini skiciraj krivulje, ki so podane v polarni obliki $r = f(\varphi)$:

   (a) $r = 1$;

   (b) $r = a\,|\sin 2\varphi|$, $a > 0$;

   (c) $r = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$.

7. Lemniskata je množica točk v ravnini katerih produkt razdalj od gorišč $F_1(a,0)$ in $F_2(-a,0)$, kjer je $a > 0$, je enak a^2.

   (a) Dokaži, da je lemniskata implicitno podana kot $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

   (b) S pomočjo polarnih koordinat skiciraj lemniskato.

8. Skiciraj krivulji, ki sta podani implicitno kot

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2x^3 \quad \text{in} \quad \left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy\,.$$

Zveznost funkcij dveh spremenljivk

9. Ali so naslednje funkcije zvezne v točki $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, x \sin\frac{1}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. Dokaži, da velja:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = e\,.$$

1. Izračunaj limiti

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{\sin^2 x\,\sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)} \quad \text{in} \quad \lim_{x,y\to 0} \left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{y}{x^2+y^2}}\,.$$

11. Določi medsebojni odnos števil n, m in p, da bo obstajala limita

$$\lim_{x,y\to 0}\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}.$$

Samostojno reši: [1, Naloge: 456, 465, 470], [3, Naloge: 145, 170 , 174] in [4, IX. Naloge: 65, 66, 68].

Parcialna odvedljivost

Naloge na vajah:

Parcialni odvod

1. Izračunaj parcialna odvoda f_x in f_y za funkcijo:

   (a) $f(x,y) = 12x^2 - 4y^2$;

   (b) $f(x,y) = x \arctan xy$;

   (c) $f(x,y) = x^y$.

2. Funkcija dveh spremenljivk naj bo podana s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

   (a) Ali je f zvezna v točki $(0,0)$?

   (b) Ali je f parcialno odvedljiva?

   (c) Ali je parcialni odvod f_x (f_y) zvezen?

3. Dokaži ali ovrzi naslednji trditvi:

(a) Če $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni zvezna v točki a, potem tudi ni odvedljiva v točki a.

(b) Če $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni zvezna v točki (a,b), potem v tej točki ni parcialno odvedljiva. Primer:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Uporaba diferenciala

4. Izračunaj približno vrednost $1.04^{2.02}$.

5. Za koliko odstotkov se spremeni volumen valja, če se višina in polmer povečata za 1%?

6. Gradi se jez v obliki polkroga s polmerom $r=50\,m$ in $\alpha=\frac{\pi}{3}$, debelino $d=2\,m$ in višino $h=30\,m$. Za koliko odstopa volumen jeza, če lahko r, d in h odstopajo za $0.1\,m$ ter α odstopa za $10'$?

7. Naj bo $u(x,y)=e^{x-2y}$ in $x(t)=\sin t$, $y(t)=t^3$. Izračunaj $\frac{\partial u}{\partial t}$ in sicer

   (a) direktno;

   (b) s pomočjo verižnega pravila.

8. Podan naj bo trikotnik s stranicama $a=b=1\,m$ in vmesnim kotom $\alpha=60^\circ$. Prva stranica se začne povečevati s hitrostjo $v_1=10\,cm/s$, druga pa zmanjševati s hitrostjo $v_2=-5\,cm/s$, kot se povečuje z $\omega=3^\circ\,s^{-1}$. Kako se začne spreminjati ploščina trikotnika?

9. Naj bo $f=f(x,y)$. Izraz xf_x+yf_y preoblikuj v polarne koordinate, t.p. izrazi ga s pomočjo r, φ, f_r oziroma f_φ.

10. Za funkcijo $f(x,y)$ pravimo, da je homogena stopnje $k\in\mathbb{N}_0$, če za vsak $m\in\mathbb{R}$ velja $f(mx,my)=m^kf(x,y)$.

    (a) Ali je funkcija

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$$

homogena? Določi tudi stopnjo homogenosti.

(b) Dokaži, da vsako homogeno funkcijo stopnje k lahko zapišemo kot $f(x,y)=x^kF\left(\frac{y}{x}\right)$ in izračunaj izraz xf_x+yf_y.

Višji parcialni odvodi

11. Ali sta za funkcijo

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

parcialna odvoda f_{xy} in f_{yx} zvezna? Ali sta enaka? Odgovor utemelji.

12. Izračunaj $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, kjer je $z = f(x+y, xy)$.

13. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$, kjer je $z = 2u + v$ in $x = u + \ln v$ ter $y = v - \ln u$.

Taylorjeva vrsta

14. Funkcijo $f(x,y) = x^3 + xy^2$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $(2,1)$.

15. Razvij funkcijo $f(x,y) = e^{x+y}$ v Taylorjevo vrsto okoli $(0,0)$ do členov reda 4.

16. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$f(x,y) = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$$

   (a) Določi definicijsko območje funkcije f.

   (b) Funkcijo f razvij v Taylorjevo vrsto okoli $(0,0)$ in določi območje konvergence te vrste.

Samostojno reši: [1, Naloge: 476, 484, 487], [3, Naloge: 177, 179 , 180] in [4, IX. Naloge: 92, 100, 104].

Ekstremi funkcij več spremenljivk

Naloge na vajah:

Lokalni in globalni ekstremi funkcij več spremenljivk

1. Poišči lokalne ekstreme funkcije

   (a) $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$;

   (b) $g(x,y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) e^{-x^2-y^2}$.

2. Ali ima katera od funkcij $f(x,y) = \sin xy$, $g(x,y) = \cos xy$ ekstrem v točki $(0,0)$?

3. Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.

4. Preveri, da ima funkcija $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ neskončno maksimumov in nobenega minimuma.

5. Poišči globalni ekstrem funkcije $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na območju, ki je omejeno z $x=0$, $y=0$ in $x+y=6$.

6. Ali ima funkcija $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$ lokalne ekstreme?

7. Pločevina ima obliko pravokotnika dimenzije h in d. Želimo narediti tak žleb, da bo njegov volumen največji (skica). Določi dimenzije žleba.

8. V krog z danim polmerom r včrtaj trikotnik z največjo ploščino.

Vezani ekstrem

9. Na elipsi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ določi točko C, da bo ploščina trikotnika ΔABC, kjer je $A(2,0)$ in $B(0,3)$, največja.

10. Katera točka na krivulji $x^4 + y^4 + 3xy = 2$ je izhodišču najbližja?

11. Katere točke na elipsoidu $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$ so najmanj oz. najbolj oddaljene od ravnine $z = 0$.

12. Glede na realno število $a \geq 0$ klasificiraj globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = 3x^2 - axy + 3y^2$ na krogu $x^2 + y^2 \leq 2$.

13. Na krivulji, ki je presek ploskev $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ in $x^2 - x + y^2 = 0$, poišči tiste točke, ki so najmanj oz. najbolj oddaljene od osi y.

Samostojno reši: [1, Naloge: 494, 499, 500], [3, Naloge: 185, 203 , 205] in [4, IX. Naloge: 56, 109, 112].

Izrek o implicitni funkciji

Naloge na vajah:

1. Naj bo $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$.

   (a) Dokaži, da enakost $F(x,y) = 0$ v okolici točke $x = 1$ določa natanko eno funkcijo $y(x)$ z lastnostjo $y(1) = 1$ in $F(x, y(x)) = 0$ za vsak x iz te okolice.

   (b) Funkcijo $y(x)$ razvij v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

   (c) Poišči vse točke (a,b), ki zadoščajo enačbi $F(x,y) = 0$, vendar pa ta enačba v okolici točke a ne določa nobene funkcije $y(x)$ z lastnostjo $y(a) = b$ in $F(x, y(x)) = 0$ za vsak x iz te okolice.

2. Dokaži, da funkcija $F(x,y) = \sin xy + \sin xz + z \sin yz = 0$ v okolici točke $(0,1)$ določa neskončno zveznih funkcij $z = z(x,y)$, ki zadoščajo $F(x,y,z(x,y)) = 0$, vendar pa samo eno tako, da je $z(0,1) = 2\pi$.

3. Imamo funkciji

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 \quad \text{in} \quad G(x,y,z) = \sin(\pi xyz)\ .$$

   (a) Dokaži, da obstajata enolično določeni funkciji $y(x)$ in $z(x)$, ki sta definirani na neki okolici $x = 1$, da je $y(1) = 1$, $z(1) = 2$ ter $F(x, y(x), z(x)) = 0$ in $G(x, y(x), z(x)) = 0$ za vsak x iz te okolice.

   (b) Dokaži, da je v točki $x = 1$ funkcija $y(x)$ padajoča in da ima funkcija $z(x)$ v tej točki lokalni ekstrem.

Samostojno reši: [3, Naloge: 187, 190, 191] in [4, IX. Naloge: 60, 118, 120].

Integrali s parametrom

Naloge na vajah:

1. Izračunaj limito $\lim_{y\to 0} F(y)$, če je
$$F(y)=\int_0^2 x^2\cos xy\,dx\,.$$

2. Izračunaj limito $\lim_{y\to 0} F(y)$, če je
$$F(y)=\int_0^1 \frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\,.$$

3. Naj bo
$$F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(1+y\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}dx\,.$$
Za $y\in(-1,1)$ izračunaj $F(y)$.

4. Naj bo $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(b^2-\sin^2 x\right)dx$. Za $b>1$ izračunaj $I(b)$.

5. Izračunaj integral
$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\,;\quad 0<a<b$$
tako, da v ustreznem dvakratnem integralu zamenjaš vrstni red integracije.

6. Ali velja enakost
$$\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy\ ?$$

7. Naj bo $I(x)=\int_0^x (x+y)\,f(y)\,dy$, kjer je f realna zvezno odvedljiva funkcija. Izračunaj $I''(x)$.

8. Naj bo
$$F(y)=\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} |x|^3 e^{-x^2}dx\,,\quad y\geq 0\,.$$
Izračunaj $F'(y)$.

9. Za katera realna števila a konvergira integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$$

in za katera konvergira enakomerno?

10. Za katera realna števila a konvergira integral $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ in kdaj konvergira enakomerno?

11. Izračunaj integral
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx\,; \quad 0 < a < b$$
tako, da v ustreznem dvakratnem integralu zamenjaš vrstni red integracije.

12. Dokaži, da lahko zamenjaš vrstni red integracije in izračunaj integral
$$\int\limits_0^{\infty} da \int\limits_{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{24}}^{\sqrt{3}} \frac{x^a \ln x}{(1+x^2)\,(1+x^a)^2} dx\,.$$

13. Naj bo $I(r) = \int_0^\infty \frac{\arctan rx}{x(1+x^2)} dx$, $r \in \mathbb{R}$. Izračunaj $I(r)$ in vse korake dobro utemelji.

Eulerjevi funkciji Gama in Beta

14. Izračunaj integrale:

    (a) $\int_0^\infty x^{2m} e^{-x^2} dx$;

    (b) $\int_0^1 4^n x^n (1-x)^n \, dx$;

    (c) $\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}$;

    (d) $\int_0^a x^{2m} \sqrt{a^2 - x^2} dx$

15. Dokaži, da je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \, \cos^{2q-1} x \, dx = \frac{1}{2} B(p,q)$$

in izračunaj integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x \, dx$.

16. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1} dx \, .$$

17. Naj bo $\varphi(m) = \int_0^\infty e^{-x^m} dx$, $m \in \mathbb{R}$.

    (a) Določi definicijsko območje funkcije φ.

    (b) Izračunaj limito $\lim_{m \to \infty} \varphi(m)$.

    (c) Za $n \in \mathbb{N}$ izračunaj $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.

Samostojno reši: [2, Naloge: 8, 13, 21], [3, Naloge: 217, 219, 221] in [4, XI. Naloge: 97, 100, 102].