1 Štiri osnovna pravila kombinatorike

Pravilo produkta:

Če lahko element $a \in A$ izberemo na n načinov, element $b \in B$ na m načinov, lahko urejeni par (a, b) izberemo na $n \cdot m$ načinov:

$$|A| = n; |B| = m \Longrightarrow |A \times B| = n \cdot m$$

Pravilo vsote:

$$|A| = n; |B| = m; A \cap B = \emptyset \Longrightarrow |A \cup B| = n + m$$

Dirichletovo načelo (princip golobnjaka):

Če n predmetov zložimo v m predalov, kjer je $n > m$, tedaj sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Posplošitev Dirichletovega načela:

Če $n = k \cdot m + r$, kjer je $r \geq 1$, predmetov zložimo v m predalov, kjer je $n > m$, tedaj bo vsaj v enem predalu vsaj $k + 1$ predmetov.

Pravilo štetja parov:

Naj bosta X in Y končni množici ter R binarna relacija na množici $X \times Y$. Če označimo

$$v_x(R) = \{(x, y) \mid (x, y) \in R, y \in Y\}$$
$$s_y(R) = \{(x, y) \mid (x, y) \in R, x \in X\}$$

potem velja:

$$|R| = \sum_{x \in X} |v_x(R)| = \sum_{y \in Y} |s_y(R)|$$

Naloge:

1. Na razpolago imamo 6 različnih kuvert in 4 različne znamke. Na koliko načinov lahko:
   (a) izberemo kuverto z znamko?
   (b) polepimo vse 4 znamke na kuverte?
   (c) polepimo vse znamke na kuverte tako, da je na vsaki kuverti največ 1 znamka?

2. Imamo 6 rdečih, 8 zelenih in 2 modri kroglici, kroglice ločimo le po barvi. Na koliko načinov lahko izberemo nekaj kroglic in jih damo v predal, če je pomembno samo število kroglic posamezne barve v predalu in velja:
   (a) predal je lahko tudi prazen?
   (b) v predalu morata biti natanko dve rdeči kroglici?
   (c) v predalu morajo biti vsaj tri zelene, zunaj pa morata ostati vsaj dve rdeči in ena modra kroglica?

3. Koliko je števil med 100 in 10000
   (a) s samimi različnimi števkami in koliko teh je lihih?
   (b) če dve enaki števki nikoli ne stojita skupaj?

4. V 1.a je 34 učencev, v 1.b 37 in v 1.c 32.
   (a) Na koliko načinov lahko izberemo dva predstavnika razredov?
   (b) Na koliko načinov lahko izberemo dva predstavnika razredov, če morata biti iz različnih razredov?

5. Profesor je pozabil dežnik ali na banki, ali v lekarni, ali na pošti, ali v trgovini. Dežnik je šel iskat na vsa mesta, kjer se je tega dne zadrževal. Takoj, ko ga najde, se vrne domov. Koliko različnih profesorjevih obhodov obstaja?

6. Vseh 25 črk abecede in vseh 10 števk želimo kodirati z zaporedjem ničel in enic dolžine k. Vsaj kolikšen mora biti potem k?

7. Morsova abeceda je način kodiranja s pomočjo pik in črtic, kjer so kode lahko različnih dolžin. Vsaj kolikšna mora biti dolžina najdaljše kode, da lahko zakodiramo vsa liha štirimestna števila s samimi različnimi števkami?

8. V učilnici je 15 računalnikov in 35 učencev. Dokaži, da obstaja računalnik, za katerim bodo sedeli vsaj trije učenci.

9. Tablico velikosti 5×5 zapolnimo s števili -1, 0 in 1. Dokaži, da sta ne glede na izbiro števil vsaj dve izmed izračunanih vsot po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah vedno enaki.

10. V ravnini je podanih 5 različnih točk s celoštevilskimi koordinatami. Dokaži, da je razpolovišče vsaj ene izmed daljic med dvema točkama celoštevilska točka.

11. Avtoštopar štopa 10 ur in prepotuje 45 km. V prvi uri je naredil 6 km, v zadnji pa 3 km. Dokaži, da obstajata dve zaporedni uri, v katerih je naredil vsaj 9 km.

12. V razredu je 36 učencev. Vsak obiskuje natanko dva krožka in k vsakemu krožku vpisanih natanko 12 učencev. Koliko različnih krožkov učenci obiskujejo?

13. Naslovnikom želimo razdeliti 70 različnih sporočil. Da raznašalci ne bi ugotovili vsebine sporočil, vsako sporočilo razdelimo na 5 delov in jih raznašalcem razdelimo tako, da ima vsak dele 7 različnih sporočil. Koliko raznašalcev potrebujemo?

2 Urejene in neurejene izbire

n različnih elementov razporejamo na k bodisi označenih bodisi neoznačenih mest.

	Urejene izbire (variacije)	**Neurejene izbire** (kombinacije)
S ponavljanjem	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Brez ponavljanja	$n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

n različnih elementov lahko postavimo v vrsto na $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ različnih načinov.

Naloge:

1. Na banki čaka 7 ljudi, med njimi sta tudi Jure in Špela. Na koliko načinov se lahko razporedijo v vrsto, če:
   (a) ni nobenih omejitev,
   (b) mora Špela stati neposredno za Juretom,
   (c) mora Špela stati za Juretom, vendar ne nujno neposredno za njim?
2. Na podelitvi je predvidenih n govornikov. Na koliko načinov se lahko razporedijo, če govornik A ne sme nastopiti pred govornikom B?
3. V knjigarni imajo 4 različne kuharske knjige, 6 različnih romanov in 2 različna slovarja. Na koliko načinov jih lahko postavijo na ravno polico, če:
   (a) ni nobenih omejitev,
   (b) morajo knjige iste vrste stati skupaj,
   (c) nobeden od slovarjev ne stati niti na začetku niti na koncu police?
4. Koliko besed iz 8 črk lahko sestavimo v naši abecedi, če
   (a) ni omejitev?
   (b) vsaka beseda vsebuje natanko 3 različne samoglasnike in natanko 5 različnih soglasnikov?
   (c) vsaka beseda vsebuje 3 ali 4 ali 5 ne nujno različnih samoglasnikov?
5. Na koliko načinov lahko 5 enakih kroglic pobarvamo s 3 različnimi barvami, če moramo pobarvati vse kroglice in lahko tudi vse kroglice pobarvamo z isto barvo?
6. V cvetličarni prodajajo 12 vrst različnih lončnic. Zaloga vsake vrste lončnic je neomejena. Na koliko načinov lahko izberemo:
   (a) 4 različne lončnice,
   (b) 4 lončnice (ne nujno različne),
   (c) vsaj 1 in največ 3 lončnice (ne nujno različne)?
7. Babica ima na razpolago bombone, žvečilke in čokoladice. Največ ima bombonov najmanj pa čokoladic. Babica lahko sladkarije razdeli dvema vnukoma na 715 načinov. Koliko sladkarij vsake vrste ima na voljo?

8. Na koliko načinov lahko n ljudi razporedimo za okroglo mizo, če so stoli:
   (a) oštevilčeni,
   (b) neoznačeni,
   (c) neoznačeni in sta Ana in Bojan skregana ter zato ne smeta sedeti skupaj?
9. Naj bosta p in q naravni števili. Poišči število najkrajših poti v celoštevilski mreži od točke $(0,0)$ do točke (p,q).
10. Na ŠTUK je prišlo m fantov in m deklet, od katerih n deklet noče plesati. Na koliko načinov se lahko preostali združijo v plesne pare?
11. V ravnini je n točk, med katerimi je k kolinearnih, $n > k$, razen teh pa nobena druga trojica ne določa premice.
    (a) Koliko različnih premic določajo?
    (b) Koliko različnih trikotnikov določajo?
12. Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto n različnih belih in k različnih rdečih avtomobilov, da bo med dvema rdečima vedno vsaj en bel avtomobil?
13. Na koliko načinov lahko na 12 oštevilčenih parkirnih mest razporedimo 5 različnih belih, 4 različne rdeče in 3 različne modre avtomobile, če mora med poljubnima dvema rdečima stati vsaj en bel (lahko pa še kakšen moder) avtomobil?

3 Binomski in multinomski koeficient

Binomski koeficient:

Naj bo $n \geq k \geq 0$. Definirajmo, da je $0! = 1$. Potem je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Za $1 \leq k \leq n$ velja:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Binomski izrek:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Multinomski koeficient:

Naj bo M multimnožica s k različnimi elementi, ki se ponavljajo $n_1, \ldots, n_k$-krat, kjer je $n_1 + \ldots + n_k = |M| = n$. Tedaj je število permutacij M enako

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Multinomski izrek:

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_k)^n = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

Naloge:

1. Izračunaj vrednost izraza:
   (a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$
   (b)
   $$\sum_{(n_1, n_2, \ldots n_k)} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_k}, \text{ kjer je } n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \text{ in } 0 \leq n_i \leq n \text{ za vsak } i.$$
2. Dokaži, da velja: $\displaystyle\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.
3. V razvoju binoma $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ poišči koeficient pred x^3.
4. Poišči koeficiente pred x in x^2 v polinomu $(1-4x)^6\,(1+3x)^8$.
5. V razvoju multinoma poišči koeficiente pred določenimi členi:
   (a) $(x+y+z+u+w)^{11}$; $x^3y^4zw^3$;
   (b) $(3x-2y-z)^5$; x^2yz^2;
6. Poišči koeficiente pred x^{12} in x^{20} v polinomu $(1-3x^4+2x^6)^{15}$.
7. Naj bodo $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Na koliko načinov lahko $x^3y^4z^3$ zapišemo kot produkt ustreznega števila faktorjev? Koliko je načinov, če mora drugi in šesti faktor biti z?
8. Na koliko načinov lahko n različnih oblačil pospravimo v pet različnih omar tako, da bo v i-ti omari i oblačil, za $i \in \{1,2,3,4\}$, v peti pa vsa preostala?
9. Na koliko načinov lahko razvrstimo v vrsto 5 enakih rdečih, 3 enake zelene in 4 enake modre kroglice?
10. Naj bo $a = 62774277$. Koliko 8 mestnih števil lahko sestavimo iz števk števila a?
11. Tlakovali bi radi 9m dolgo in 1m široko pot. Na razpolago imamo 4 bele, 3 rumene, 1 zeleno in 1 modro ploščo velikosti $1m^2$. Plošče med seboj ločimo le po barvi in jih ne smemo rezati.
    (a) Na koliko načinov lahko tlakujemo pot?
    (b) Na koliko načinov lahko tlakujemo pot, če mora na začetku in na koncu biti plošča iste barve?
    (c) Na koliko načinov bi lahko s temi ploščami tlakovali pot dolžine 5m?

4 Princip vključitev in izključitev

Naj bodo $A_1, \ldots A_n$ končne množice. Tedaj je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots \pm \alpha_n$$

kjer je α_i vsota moči vseh možnih presekov po i množic.

Naloge:

1. V športno društvo Norci so vključeni ekstremni športniki, ki se ukvarjajo s tremi ekstremnimi športi: BASE jumping, prosto plezanje in potapljanje na dah. Ob v članitvi morajo na pristopni izjavi označiti, s katerimi ekstremnimi športi se ukvarjajo. Po pregledu pristopnih izjav so ugotovitve naslednje. 9 članov se ukvarja z BASE jumpingom, 14 s prostim plezanjem in 11 s potapljanjem na dah. Za BASE jumping in prosto plezanje so navdušeni 3, za prosto plezanje in potapljanje na dah jih je 6 ter za BASE jumping in potapljanje na dah 2. Med vsemi v društvu sta 2, ki se ukvarjata z vsemi tremi ekstremnimi športi. Koliko je vseh športnikov v društvu?

2. Koliko je n-mestnih števil, sestavljenih le iz števk 1, 2 in 3, ki vsebujejo največ dve različni števki?

3. Avtobusna proga ima vključno z začetno in končno 5 postaj. Na začetni postaji je vstopilo 15 potnikov, na vmesnih postajah pa ni vstopil nihče. Na koliko načinov so lahko potniki izstopili, če je na vsaki postaji izstopil vsaj en potnik in so na zadnji postaji izstopili zadnji trije potniki?

4. Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 3, niso pa deljiva z 2,5,7?

5. Na vrh Triglava se je po vrsti povzpelo 9 planincev. Na koliko načinov se lahko spustijo v dolino, če nihče ne sme hoditi za tistim, za katerim se je vzpenjal?

6. Pri vhodu v restavracijo je vsak izmed n ljudi odložil svoj klobuk in dežnik. Preden zapustijo restavracijo, vsak na slepo vzame en klobuk in en dežnik. Na koliko načinov se lahko zgodi, da nihče ne vzame obeh svojih stvari?

5 Stirlingova števila 1. in 2. vrste

Stirlingova števila 1. vrste

Naj bo $n \geq k > 0$. Stirlingovo število 1. vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ je število permutacij iz S_n, ki jih lahko zapišemo kot produkt k disjunktnih ciklov.

Za vsak $1 < k < n$ velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)$$

Naloge:

1. Poišči vse permutacije iz S_3 in ugotovi, koliko permutacij je takih, ki so produkt k ciklov, $1 \leq k \leq 3$.
2. Izračunaj $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.
3. V polinomu $x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+6)$ določi koeficient pred x^4.
4. Podan je polinom $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)^2$. Izrazi koeficiente polinoma p s Stirlingovimi števili 1. vrste.
5. Na koliko načinov lahko 30 otrok razdelimo za 5 okroglih miz?

Stirlingova števila 2. vrste

Naj bo $n \geq k > 0$. Stirlingovo število 2. vrste $\left\{ n \atop k \right\}$ je število razbitij množice z n različnimi elementi na k nepraznih razredov.

Za vsak $1 < k < n$ velja:

$$\left\{ n \atop k \right\} = k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (x)_k = x^n$$

Število surjekcij iz n-množice v k-množico je enako $k! \left\{ n \atop k \right\}$.

Naloge:

1. Na koliko načinov lahko množico s štirimi elementi razbijemo na k nepraznih razredov, kjer je $1 \leq k \leq 4$?
2. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:
$$\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$$
3. Pokaži, da za vsak $n \geq 4$ velja
$$\left\{ n \atop n-2 \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$
4. Izračunaj $\left\{ 6 \atop 3 \right\}$.
5. V nekem mestu je p avtošol. Vsak izmed $p+n$ prijateljev se vpiše v eno avtošolo. Na koliko načinov lahko to naredijo, če je v vsako avtošolo vpisan vsaj eden izmed njih in sta p in n poljubni naravni števili?

6 Porazdelitve

n elementov razporejamo v k predalov, ki so lahko prazni ali pa ne:

elementi označeni	predali označeni	predali prazni	število načinov
DA	DA	DA	k^n
DA	DA	NE	$k!\left\{ n \atop k \right\}$
DA	NE	DA	$\sum_{i=1}^{k} \left\{ n \atop i \right\}$
DA	NE	NE	$\left\{ n \atop k \right\}$
NE	DA	DA	$\binom{n+k-1}{n}$
NE	DA	NE	$\binom{n-1}{k-1}$
NE	NE	DA	$\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$
NE	NE	NE	$p_k(n)$

$p_k(n)$ predstavlja število različnih zapisov števila n kot vsoto k neničelnih sumandov.

Velja tudi:

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k).$$

Naloge:

1. Na koliko načinov lahko Mojci, Tini in Tadeju razdelimo 7 čokoladnih bonbonov, če so le ti med seboj:
   (a) enaki in vsak otrok dobi vsaj en bonbon;
   (b) enaki in lahko kdo ostane tudi brez bonbona;
   (c) različni in vsak otrok dobi vsaj en bonbon?

2. Pobarvati želimo ploskve običajne igralne kocke. Na razpolago imamo 6 različnih barv. Ker so ploskve označene s pikami, jih ločimo med seboj. Na koliko načinov lahko pobarvamo kocko, če moramo uporabiti natanko 3 barve?

3. Na koliko načinov lahko zapišemo 8 kot vsoto treh neničelnih sumandov?

4. Izračunaj, koliko je particij števila 12, v katerih je 6 največji sumand in jih poišči. Eno od njih predstavi s Ferrersovim diagramom.

5. Na koliko načinov lahko 10 enakih kroglic razporedimo v 5 enakih posod tako, da nobena posoda ni prazna?

6. Koliko rešitev ima enačba $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n$ v množici naravnih števil, če:
   (a) upoštevamo vrstni red;
   (b) ne upoštevamo vrstnega reda rešitev?

7 Rekurzija

Zvezi

$$a_{n+k} = A_1 a_{n+k-1} + \ldots + A_k a_n$$

pravimo homogena k-člena linearna rekurzija.

Reševanje:

Rekurziji priredimo karakteristično enačbo

$$x^k = A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k$$

Naj bodo $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ koreni te enačbe. Potem velja:

1. Če so koreni vsi različni, potem je $a_n = K_1 \alpha_1^n + \ldots + K_k \alpha_k^n$ za neke K_i
2. Če je α_i m-kratni koren, potem je $a_n = \left(K_1 + K_2 n + \ldots + K_m n^{m-1}\right) \alpha_i^n + \ldots$

Zvezi

$$a_{n+k} = A_1 a_{n+k-1} + \ldots + A_k a_n + f(n)$$

pravimo nehomogena rekurzija.

Reševanje:

$$\textbf{splošna rešitev} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

<u>Partikularna rešitev:</u>

1. Če je $f(n)$ polinom stopnje m, je tudi nastavek polinom stopnje m z nedoločenimi koeficienti.
2. Če je $f(n)$ eksponentna funkcija, je tudi nastavek oblike Ca^n. Če je a k-kratna rešitev karakteristične enačbe pripadajoče homogene rekurzije, potem je (so) nastavki $Ca^n, Cna^n, Cn^2a^n, \ldots, Cn^ka^n$.
3. Če je $f(n)$ kotna funkcija, je nastavek $B\sin(An) + C\sin(An)$.
4. Če je $f(n)$ linearna kombinacija zgornjih funkcij, je tudi nastavek linearna kombinacija ustreznih nastavkov.

Naloge:

1. Poišči splošni člen rekurzivno podanega zaporedja:
   (a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, kjer je $n \geq 3$, $a_i = i$ za $i = 0, 1, 2$;
   (b) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 4a_n = 0$, kjer je $a_0 = 2$, $a_1 = -2$ in $a_2 = 6$;
   (c) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 8a_n$, kjer je $a_0 = 2$ in $a_1 = 10$.
2. Poišči rekurzivni zapis zaporedja, katerega splošni člen je
   (a) $a_n = 2 \cdot 5^n + 7$;
   (b) $a_n = \left(\frac{4}{25} + \frac{24}{5}n\right) \cdot 2^{-n} - \frac{4}{25} \cdot 3^n$;
   (c) $a_n = n^2$.
3. Zapiši rekurzijo za število vseh takih števil dolžine $n \geq 1$, sestavljenih iz števk 1, 2 in 3, ki nimajo zaporednih enic.
4. Poišči splošno rešitev nehomogene rekurzije:
   (a) $3a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n = 3^n$;
   (b) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3^n$;
   (c) $a_n = 3a_{n-1} + n^2 - 3$, kjer je $a_0 = 1$;
   (d) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 5 - 3n + 3^n$, kjer je $a_0 = 2$ in $a_1 = 1$;