Neparametrični preizkusi značilnosti

Neparametrični testi

- Namenjeni so preizkušanju neparametričnih hipotez:
  - Prilagoditveni testi: tip porazdelitve statističnih spremenljivk.
  - Primerjalni testi: enakost porazdelitev.
  - Neodvisnost statističnih spremenljivk.
- Lastnosti neparametričnih testov:
  - So neobčutljivi na porazdelitev.
  - Primerni so za analizo vseh ordinalnih podatkov.
  - So šibkejši kot parametrični testi – statistična značilnost je težje odkrita.
  - V praksi je neparametrične teste smiselno uporabljati v kombinaciji s parametričnimi testi.

Prilagoditveni testi

- Preizkušanje domnev o porazdelitvi statističnih spremenljivk.
- X – statistična spremenljivka.
- F_X – porazdelitev sprem. X (porazdelitveni zakon).
- F_0 – izbrana porazdelitev.
- Ali je $X \sim F_0$?
- Ničelna hipoteza: $H_0(F_X = F_0)$.
- Alternativna hipoteza: $H_1(F_X \neq F_0)$.

  Najpomembnejša prilagoditvena testa:
- Pearsonov χ^2-test za preverjanje enakosti porazdelitev.
- Test Kolmogorova za preverjanje enakosti (zveznih) porazdelitev.
  - Matematično ozadje testa je zelo kompleksno.
  - Implementiran je kot test v SPSS.
  - Primer na vajah.

Pearsonov χ^2 test – postopek

- Zalogo vrednosti X razdelimo v r razredov $S_1, S_2, \ldots, S_r$.
- Iz F_0 izračunamo teoretične verjetnosti: $p_i = P(X \in S_i)$.
- Naredimo n poskusov in z n_i označimo frekvenco razreda S_i (eksperimentalna frekvenca).
- Izračunamo idealne teoretične (pričakovane) frekvence: np_i.
- Izračunamo razlike do pričakovanih frekvenc: $n_i - np_i$.

	S_1	S_2	$\cdots$	S_r
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_r
np_i	np_1	np_2	$\cdots$	np_r
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_r
$n_i - np_i$	$n_1 - np_1$	$n_2 - np_2$	$\cdots$	$n_r - np_r$

Pearsonov χ^2 test – testna statistika

- Testna statistika: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.
- Če H_0 velja, potem je $\chi^2 \approx \chi^2(r-1)$.
- Za izbrano stopnjo značilnosti α poiščemo χ^2_α, da je $P(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$ (tabela C).
- Izračunamo vrednost testne statistike χ^2 na vzorcu: χ^2_e.
- H_0 zavrnemo, če je $\chi^2_e \geq \chi^2_\alpha$ (enostranski test).
- Pogoji za Pearsonov χ^2-test:
  - Dovolj velik n, vsaj 30.
  - $np_i \geq 5$ za vsak i.
  - Poskusi so naključni in neodvisni.

Pearsonov χ^2 test – primer

- Igralni kovanec smo vrgli 100 krat. Pri tem je 60 krat padel grb. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ testiraj, ali je bil kovanec pošten.

  H_0: Kovanec je bil pošten (enakomerna porazdelitev).

  H_1: Kovanec ni bil pošten.

	Grb	Cifra
p_i	$0,5$	$0,5$
np_i	50	50
n_i	60	40
$n_i - np_i$	10	-10

$\chi^2 \approx \chi^2(r-1) = \chi^2(2-1) = \chi^2(1)$.

$\chi^2_\alpha = 3,84$ (tabela C).

$$\chi^2_e = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{100}{50} + \frac{100}{50} = 4.$$

Ker je $\chi^2_e = 4 > 3,84 = \chi^2_\alpha$, H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.

Primerjalni testi

- Namenjeni so preizkušanju domnev o enakosti porazdelitev statističnih spremenljivk.
- X, Y – statistični spremenljivki.
- F_X, F_Y – njuni porazdelitvi.
- Ali je X porazdeljena enako kot Y?
- Ničelna hipoteza: $H_0(F_X = F_Y)$.
- Alternativna hipoteza: $H_1(F_X \neq F_Y)$.

  Najpomembnejši primerjalni testi:
- Test z znaki (za odvisne vzorce) – najpreprostejši.
- Wilcoxonov test z rangi (za odvisne vzorce) – najpogostejši.
- Mann-Whitneyev inverzijski test (za neodvisne vzorce).

Test z znaki za odvisne vzorce

- X in Y statistični spremenljivki na isti populaciji.
- H vzorec velikosti n.
- Vrednosti X in Y na H (pari podatkov): $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
- Na stopnji značilnosti α testiramo $H_0(F_X = F_Y) : H_1(F_X \neq F_Y)$.
- Opazujemo razlike $x_i - y_i$.
- K^+ – število pozitivnih razlik.
- K^- – število negativnih razlik.
- Opomba: Polovico razlik, ki so enake 0, štejemo h K^+, polovico pa h K^-.
- Če H_0 velja, potem je $K^+ \sim B(n, \frac{1}{2})$.
  $K^+ = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, kjer so X_i indikatorske spremenljivke.

Veliki vzorec

Spomnimo se:

- Naj bo $X \sim B(n, p)$. Potem za velike n velja:
  $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \approx N(0, 1)$.

- Zato za velike vzorce ($n \geq 30$) velja:
- $Z = \frac{K^+ - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \approx N(0, 1)$.
- Za izbrano stopnjo značilnosti α poiščemo z_α, da je $P(|Z| \geq z_\alpha) = \alpha$.
- Izračunamo vrednost testne statistike Z na vzorcu: Z_e.
- H_0 zavrnemo, če je $|Z_e| \geq z_\alpha$.

Wilcoxonov test z rangi

- Uporablja se pri enakih pogojih kot test z znaki.
  Je statistično močnejši test, saj upošteva tudi velikost razlik.
- X in Y statistični spremenljivki na isti populaciji.
- H vzorec velikosti n.
- Vrednosti X in Y na H (pari podatkov):
  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
- Na stopnji značilnosti α testiramo
  $H_0(F_X = F_Y) : H_1(F_X \neq F_Y)$.
- Absolutnim razlikam $|x_i - y_i|$ priredimo range r_i.
  Če se večkrat pojavi ista razlika, izračunamo povprečni rang.
- W^+ – vsota rangov r_i za pozitivne razlike $x_i - y_i > 0$.
- W^- – vsota rangov r_i za negativne razlike $x_i - y_i < 0$.
- Range za $x_i - y_i = 0$ štejemo polovično k vsaki vsoti.

Wilcoxonov test z rangi za velike vzorce

- Definiramo $W = \min\{W^+, W^-\}$.
- Če velja H_0, potem:
  - sta vsoti približno enaki $\mu_W = \frac{n(n+1)}{4}$,
  - imata vsoti standardni odklon $\sigma_W = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$.
- Predpostavimo, da imamo velik vzorec ($n > 30$).
- Testna statistika: $Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} \approx N(0, 1)$.
- Za izbrano stopnjo značilnosti α poiščemo z_α, da je $P(|Z| \geq z_\alpha) = \alpha$.
- Izračunamo vrednost testne statistike na vzorcu: Z_e.
- H_0 zavrnemo, če je $|Z_e| \geq z_\alpha$.

Mann-Whitneyev inverzijski test

- Test za neodvisne vzorce.
- Namenjen je testiranju enakosti porazdelitev na različnih populacijah.
- Uporablja se lahko kot alternativa Studentovemu testu o enakosti povprečij za neodvisne vzorce.
- X in Y statistični spremenljivki.
- Na stopnji značilnosti α testiramo
  $H_0(F_X = F_Y) : H_1(F_X \neq F_Y)$.
- Naj bo vzorec za X velikosti m, za Y pa n:
  - $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
- Vzorca združimo in uredimo v skupno ranžirno vrsto.
- Preštejemo število inverzij U – število parov (x_i, y_j), za katere je $x_i > y_j$.
  Število inverzij je število med 0 in mn.

Mann-Whitneyev inverzijski test

- R_X – vsota rangov vzorca za X v skupni ranžirni vrsti.
- R_Y – vsota rangov vzorca za Y v skupni ranžirni vrsti.
- Ekstremna primera:
  - $xxx \dots xyyy \dots y$: $U = 0$; $R_X = \frac{m(m+1)}{2}$.
  - $yyy \dots yxxx \dots x$: $U = mn$; $R_X = mn + \frac{m(m+1)}{2}$.
- Če sta porazdelitvi enaki, so podatki dobro premešani in ni za pričakovati, da bi bilo število inverzij zelo veliko oz. zelo majhno.
- Označimo: $U_X = R_X - \frac{m(m+1)}{2}$.
- Podobno: $U_Y = R_Y - \frac{n(n+1)}{2}$.
- Definiramo: $U = min\{U_X, U_Y\}$.

Mann-Whitneyev test za velike vzorce

- Če je $m + n \geq 20$ in $m, n \geq 5$, je U približno normalno porazdeljena
  - s povprečjem $\mu_U = \dfrac{mn}{2}$ in
  - s standardnim odklonom $\sigma_U = \sqrt{\dfrac{mn(m+n+1)}{12}}$.
- Testna statistika:

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{(2U - mn)\sqrt{3}}{\sqrt{mn(m+n+1)}} \approx N(0,1).$$

- Za izbrano stopnjo značilnosti α poiščemo z_α, da je $P(|Z| \geq z_\alpha) = \alpha$.
- Izračunamo vrednost testne statistike Z na vzorcu: Z_e.
- H_0 zavrnemo, če je $|Z_e| \geq z_\alpha$.

Preizkus neodvisnosti s kontingenčno tabelo

- X in Y statistični spremenljivki.
- Na stopnji značilnosti α testiramo

  $H_0(X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni}) : H_1(X \text{ in } Y \text{ sta odvisni})$.
- Zalogo vrednosti spremenljivke X razbijemo na r razredov: $A_1, A_2, \dots, A_r$.
- Zalogo vrednosti spremenljivke Y razbijemo na s razredov: $B_1, B_2, \dots, B_s$.
- Na podlagi n vzorčnih podatkov izpolnimo kontingenčno tabelo.

	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_s	
A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1s}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2j}	$\cdots$	n_{2s}	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	n_{i1}	n_{i2}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{is}	$n_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rj}	$\cdots$	n_{rs}	$n_{r\cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot j}$	$\cdots$	$n_{\cdot s}$	

- n_{ij} - celična frekvenca
- $n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}, \quad n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$

- Izkaže se, da je testna statistika
$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}} - 1\right) \approx \chi^2((r-1)(s-1)).$$
- Kritično območje enostranskega testa:
  - Izberemo tak χ^2_α, da velja $P(\chi^2((r-1)(s-1)) \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$.
  - $K_\alpha = [\chi^2_\alpha, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike χ^2 na vzorcu: χ^2_e.
  - Če je $\chi^2_e \geq \chi^2_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $\chi^2_e < \chi^2_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Potrebni pogoji za preizkus:
  - Velik vzorec ($n \geq 50$).
  - Velika r in s ($r, s \geq 3$ - eden je lahko tudi 2).
  - $n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j} \geq 5n$.

- V primeru $r = s = 2$ mora veljati: $n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j} \geq 50n$.

	B_1	B_2	
A_1	a	b	$a+b$
A_2	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	

$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \approx \chi^2(1)$.

- Če pogoj $n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j} \geq 50n$ ni izpolnjen, uporabimo Yatesov popravek:
$$\chi^2_Y = \frac{n(|ad-bc| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \approx \chi^2(1).$$
Poleg tega mora veljati še: $n \geq 40$.

- Primer: Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ ugotovi, ali je porodna teža novorojenčka neodvisna od kajenja matere v nosečnosti.
  X - kajenje (da, ne).
  Y - porodna teža (normalna, nizka).
  H_0: X in Y sta neodvisni.
  H_1: X in Y sta odvisni.
  Vzorčni podatki:

	normalna	nizka	
da	85	29	114
ne	44	29	73
	129	58	187

  $r = s = 2$. Ker pogoj $n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j} \geq 50n$ ni izpolnjen, uporabimo Yatesov popravek (gledamo Continuity Correction v SPSS-u).
  $\chi^2_\alpha(1) = 3,84$ (tabela C); $\chi^2_{Ye} = 3,604$.
  Ker je $\chi^2_{Ye} < \chi^2_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.

Neparametrične primerjave več populacij

- Testiranje enakosti porazdelitev več statističnih spremenljivk.
- KRUSKAL – WALLISOV TEST za neodvisne vzorce.
  Alternativa za neparametrično metodo ANOVA.
- FRIEDMANOV TEST za odvisne vzorce.

Kruskal – Wallisov test

- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ neodvisne statistične spremenljivke.
- k neodvisnih vzorcev velikosti $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$.

  Potrebni pogoji: $k \geq 3$ in $n_i \geq 5$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$.

  Vzorčni podatki za X_i: $x_{i1}, x_{i2} \ldots, x_{in_i}$.

  Podatki niso nujno zvezni, biti morajo vsaj ordinalni.
- F_{X_i} porazdelitev spremenljivke X_i.
- Na stopnji značilnosti α testiramo ničelno hipotezo

  $$H_0(F_{X_1} = F_{X_2} = \ldots = F_{X_k})$$

  proti alternativi

  $$H_1(\text{vsaj ena porazdelitev je različna od ostalih}).$$
- Če je $k = 2$, uporabimo Mann – Whitneyev inverzijski test.

- Vse podatke zapišemo v skupno ranžirno vrsto $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in jim določimo range.
- Za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$ izračunamo:

  R_i - vsoto rangov vzorčnih podatkov za X_i v skupni ranžirni vrsti.
- Izkaže se, da je testna statistika:

  $$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \approx \chi^2(k-1).$$
- Kritično območje enostranskega testa:
  - Izberemo tak χ^2_α, da velja $P(\chi^2(k-1) \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$.
  - $K_\alpha = [\chi^2_\alpha, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike H na vzorcu: H_e.
  - Če je $H_e \geq \chi^2_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $H_e < \chi^2_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.

- Primer: 30 študentov je ocenjevalo učitelje A, B in C. Prvih 10 študentov je ocenjevalo prvega, drugih 10 drugega in zadnjih 10 tretjega. Ocenjevali so z ocenami od 1 do 5.

  Rezultati so bili naslednji:
  - $A : 2, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 3$,
  - $B : 3, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 2, 4, 3$,
  - $C : 2, 3, 2, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 4$.

  Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ testiraj, ali so ocene učiteljev porazdeljene enako.

  H_0: Ocene učiteljev so enako porazdeljene.

  H_1: Ocene učiteljev niso enako porazdeljene.

- Rešitev:

  Uporabi K-Independent Samples test v SPSS-u.

  $n_1 = n_2 = n_3 = 10$.

  $n = 30$.

  $\chi^2_\alpha = 5,99$ (tabela C).

  $R_1 = 205$; $R_2 = 159,5$; $R_3 = 100,5$.

  $H_e \doteq 7,56$.

  Ker je $\chi^2_e \geq \chi^2_\alpha$, H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.

Friedmanov test

- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ statistične spremenljivke.
- k odvisnih vzorcev velikosti n.

  Potrebni pogoji: $k > 5$ ali $k = 3$ in $n > 13$ ali $k = 4$ in $n > 8$ ali $k = 5$ in $n > 5$.

  Vzorčni podatki za X_i: $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$.

  Podatki morajo biti vsaj ordinalni.
- F_{X_i} porazdelitev spremenljivke X_i.
- Na stopnji značilnosti α testiramo ničelno hipotezo

$$H_0(F_{X_1} = F_{X_2} = \ldots = F_{X_k})$$

  proti alternativi

$$H_1(\text{vsaj ena porazdelitev je različna od ostalih}).$$

- Če je $k = 2$, uporabimo Wilcoxonov test z rangi.

- Podatke zapišemo v tabelo:

	X_1 : rang	X_2 : rang	$\cdots$	X_k : rang
1	x_{11} :	x_{21} :		x_{k1} :
2	x_{12} :	x_{22} :		x_{k2} :
$\vdots$	$\vdots$:	$\vdots$:		$\vdots$:
n	x_{1n} :	x_{2n} :		x_{kn} :
	: R_1	: R_2		: R_k

- Podatke v vsaki vrstici rangiramo z rangi od 1 do k.
- Naj bo R_i vsota rangov za podatke spremenljivke X_i.
- S Friedmanovim testom preverimo, ali se vsote rangov R_i statistično značilno razlikujejo.

- Izkaže se, da je testna statistika:

$$\chi_F^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1) \approx \chi^2(k-1).$$

- Kritično območje enostranskega testa:
  - Izberemo tak χ_α^2, da velja $P(\chi^2(k-1) \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$.
  - $K_\alpha = [\chi_\alpha^2, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike χ_F^2 na vzorcu: $\chi_{F_e}^2$.
  - Če je $\chi_{F_e}^2 \geq \chi_\alpha^2$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $\chi_{F_e}^2 < \chi_\alpha^2$, o hipotezi H_0 ne odločimo.

- Primer: 15 študentov je ocenjevalo učitelje A, B in C z ocenami od 1 do 5.

  Rezultati so bili naslednji:
  - A : 4, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 3, 3, 4, 2, 5, 4,
  - B : 3, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 2, 4, 3, 2, 4, 5, 4, 3,
  - C : 2, 3, 1, 1, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 1, 2, 3.

  Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ testiraj, ali so ocene učiteljev porazdeljene enako.

  H_0: Ocene učiteljev so enako porazdeljene.

  H_1: Ocene učiteljev niso enako porazdeljene.

- Rešitev:

  Uporabi K-Related Samples test v SPSS-u.

  $k = 3, n = 15$.

  $\chi_\alpha^2 = 5,99$ (tabela C).

  $R_1 = 39$; $R_2 = 27$; $R_3 = 24$.

  $\chi_{F_e}^2 \doteq 9,69$.

  Ker je $\chi_e^2 \geq \chi_\alpha^2$, H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.