Parametrični preizkusi značilnosti

Statistične hipoteze

- Domneve o statističnih spremenljivkah na dani populaciji.
- Hipoteze so lahko parametrične ali neparametrične.
- Parametrične hipoteze vsebujejo številske parametre:
  - Povprečna višina smreke na Pohorju je 20m.
  - Standardni odklon višine je 2m.
- Neparametrične hipoteze številskih parametrov ne vsebujejo:
  - Višina smrek na Pohorju je porazdeljena normalno.
  - Višina smreke na Pohorju je (oz. ni) odvisna od nagiba terena, na katerem raste.
- Parametrične hipoteze preizkušamo (testiramo) s parametričnimi preizkusi (testi).
- Neparametrične hipoteze preizkušamo (testiramo) z neparametričnimi preizkusi (testi).

Statistične hipoteze

- Hipoteze so lahko enostavne ali sestavljene.
- Enostavna hipoteza natančno opredeljuje porazdelitev:
  - X je porazdeljena normalno z $\mu = 5$ in $\sigma = 2$.
  - X je indikatorska spremenljivka s $p = 0.5$.
- Hipoteza je sestavljena, če ni enostavna:
  - X je porazdeljena normalno (parametrov ne poznamo).
  - X je porazdeljena normalno z $\mu = \mu_0$ (σ ne poznamo).
- Dopustna hipoteza je hipoteza, ki je v konkretnem primeru smiselna.

Testiranje hipotez

- Na začetku testiranja vedno postavimo ničelno hipotezo H_0.
- Nato postavimo alternativno (nasprotno) hipotezo H_1, ki konkurira ničelni hipotezi.
- Primer: Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$.
  - H_0: $\mu = \mu_0$.
  - H_1: $\mu \neq \mu_0$ ali $\mu > \mu_0$ ali $\mu < \mu_0$.
- S statističnim testom lahko potrdimo eno od H_0 in H_1 ter drugo zavrnemo, ali o H_0 ne odločimo.

Napake

- Možne so napake – njihovo verjetnost želimo zmanjšati.
- Ločimo napake I. in napake II. vrste.
- Napako I. vrste naredimo, če zavrnemo pravilno hipotezo H_0.
  - Verjetnost za nastop te napake označimo z α.
  - α lahko nadzorujemo (v naprej predpišemo).
  - Napogostejši vrednosti: $\alpha = 0.05$ in $\alpha = 0.01$.
- Napako II. vrste naredimo, če potrdimo neveljavno hipotezo H_0.
  - Verjetnost za nastop te napake je težko določiti.
  - V praksi je lahko velika.
- Zato: Hipoteze H_0 nikoli ne potrdimo! Bodisi jo zavrnemo in potrdimo H_1 bodisi o H_0 ne odločimo.

Kritično območje testa

- Kritično območje testa je območje zavračanja hipoteze H_0.
- Dvostranski test.
  - $H_0 : q = q_0$, $H_1 : q \neq q_0$.
  - H_0 zavrnemo in potrdimo H_1, če je ocena za parameter q veliko večja ali veliko manjša od q_0.
    V nasprotnem primeru o H_0 ne odločimo.
  - Kritično območje testa je sestavljeno iz dveh delov.
- Enostranski test.
  - $H_0 : q = q_0$, $H_1 : q > q_0$.
  - H_0 zavrnemo in potrdimo H_1, če je ocena za parameter q veliko večja od q_0.
    V nasprotnem primeru o H_0 ne odločimo.
  - Kritično območje testa je sestavljeno iz enega dela.

Statistična značilnost

- Če hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1, pravimo:
  - vzorčni podatki so v nasprotju s H_0 oz.
  - vzorčni podatki se statistično značilno razlikujejo od H_0 oz.
  - razlika je statistično značilna.
- Če hipoteze H_0 ne zavrnemo (o H_0 ne odločimo), pravimo:
  - razlika ni statistično značilna – med H_0 in vzorčnimi podatki test ne pokaže statistično značilne razlike (razlika mogoče je, a je izbran test ne pokaže).
  - To ne pomeni, da H_0 potrdimo!
  - V tem primeru o H_0 ne odločimo.
  - Izognemo se napaki II. vrste.
- Verjetnosti α za napako I. vrste bomo rekli stopnja značilnosti.
- Kritično območje testa bo odvisno od α.
  Označevali ga bomo s K_α.

Testiranje – postopek

- Premislimo, kaj je vsebina testiranja:
  - določimo ničelno hipotezo H_0,
  - določimo alternativno hipotezo H_1.
- Bomo uporabili enostranski ali dvostranski test?
- Izberemo stopnjo značilnosti (npr. $\alpha = 0.05$ ali $\alpha = 0.01$).
- Izberemo primerno testno statistiko U (odvisno od hipoteze).
- Določimo K_α – kritično območje testa oz. testne statistike.
- Izračunamo vrednost testne statistike U na vzorcu (eksperimentalno vrednost U_e).
- Če U_e pade v K_α, H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
- Če U_e ne pade v K_α, o H_0 ne odločimo.

Testiranje populacijskega povprečja - normalna porazdelitev

- Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$, kjer sta parametra μ in σ neznana.
- Za ničelno hiptezo izberemo $H_0 : \mu = \mu_0$, za alternativno pa:
  a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ – dvostranski test ali
  b) $H_1 : \mu > \mu_0$ (ali $H_1 : \mu < \mu_0$) – enostranski test.
- Stopnja značilnosti naj bo α ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$ ali manj).
- Ker je $X \sim N(\mu, \sigma)$, za testno statistiko vzamemo:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim S(n-1) \quad (T\text{-test}),$$ kjer je
  - n velikost vzorca,
  - $\overline{X}$ vzorčno povprečje in
  - S^2 vzorčna disperzija.
- Če H_0 velja, se statistika T porazdeli po $S(n-1)$.

Kritično območje dvostranskega testa - normalna porazdelitev

a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ – dvostranski test.
  - Izberemo tak t_α, da velja $P(|T| < t_\alpha) = 1 - \alpha$ (tabela B). Npr. za $n = 15$ in $\alpha = 0.05$ dobimo $t_\alpha = 2.145$.
  - $K_\alpha = (-\infty, -t_\alpha] \cup [t_\alpha, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike T na vzorcu: T_e.
  - Če je $|T_e| \geq t_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $|T_e| < t_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Opomba: H_0 zavrnemo in potrdimo H_1, če μ_0 ne leži na intervalu zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$.
- Verjetnosti $p = P(|T| \geq |T_e|)$ rečemo p-vrednost ali signifikanca testa.

  Če je $p \leq \alpha$, H_0 zavrnemo.

Kritično območje enostranskega testa - normalna porazdelitev

b) $H_1 : \mu > \mu_0$ – enostranski test.
  - Izberemo tak t_α, da velja $P(T < t_\alpha) = 1 - \alpha$ (tabela B). Npr. za $n = 15$ in $\alpha = 0.05$ dobimo $t_\alpha = 1.761$.
  - $K_\alpha = [t_\alpha, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike T na vzorcu: T_e.
  - Če je $T_e \geq t_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $T_e < t_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Naj bo $p = P(|T| \geq |T_e|)$.

  Če je $\frac{p}{2} \leq \alpha$, H_0 zavrnemo.

Testiranje populacijskega povprečja - poljubna porazdelitev

- Recimo, da X ni normalno porazdeljena.
- H_0, H_1 in α enako kot prej.
- Če imamo velik vzorec, $n \geq 30$, za testno statistiko izberemo:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \approx N(0,1) \quad (Z\text{-test}).$$
- Kritično območje dvostranskega Z-testa:
  - Izberemo tak z_α, da velja $P(|Z| < z_\alpha) = 1 - \alpha$ (tabela A).
  - $K_\alpha = (-\infty, -z_\alpha] \cup [z_\alpha, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike Z na vzorcu: Z_e.
  - Če je $|Z_e| \geq z_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $|Z_e| < z_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Opomba: H_0 zavrnemo in potrdimo H_1, če μ_0 ne leži na intervalu zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$.
- Naj bo $p = P(|Z| \geq |Z_e|)$.

  Če je $p \leq \alpha$, H_0 zavrnemo.

Testiranje populacijskega povprečja - poljubna porazdelitev

- Kritično območje enostranskega Z-testa za $H_1 : \mu > \mu_0$:
  - Izberemo tak z_α, da velja $P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$ (tabela A).
  - $K_\alpha = [z_\alpha, \infty)$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike Z na vzorcu: Z_e.
  - Če je $Z_e \geq z_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $Z_e < z_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Naj bo $p = P(|Z| \geq |Z_e|)$.
  Če je $\frac{p}{2} \leq \alpha$, H_0 zavrnemo.
- Kritično območje enostranskega Z-testa za $H_1 : \mu < \mu_0$:
  - Izberemo tak z_α, da velja $P(Z > z_\alpha) = 1 - \alpha$ (tabela A).
  - $K_\alpha = (-\infty, -z_\alpha]$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike Z na vzorcu: Z_e.
  - Če je $Z_e \leq -z_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $Z_e > -z_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Naj bo $p = P(|Z| \geq |Z_e|)$.
  Če je $\frac{p}{2} \leq \alpha$, H_0 zavrnemo.

Testiranje populacijskega povprečja - primer

- Naj X meri porodno težo novorojenčkov in naj bo:
  - $n = 187$, $\overline{X} = 2946$, $S = 698$ in $\alpha = 0,05$.
  - $H_0 : \mu = 3050$ in $H_1 : \mu \neq 3050$.

  Testiraj ničelno hipotezo H_0 proti alternativi H_1.
- Rešitev:
  - Ker imamo velik vzorec, za testno statistiko izberemo:
  - $Z = \dfrac{\overline{X} - 3050}{S}\sqrt{n} \approx N(0,1)$.
  - Uporabimo dvostranski test.
  - $z_\alpha = 1.96$.
  - $Z_e = \frac{2946-3050}{698}\sqrt{187} \doteq -2.04$.
- Ker je $|-2.04| \geq 1.96$, H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Spomnimo se: Interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1 - \alpha = 0.95$ za ta primer je $[2846, 3046]$.

Testiranje populacijskega povprečja - primer

- $p = P(|Z| \geq 2.04) \doteq 0.041$.

  Ker je $p < \alpha$, H_0 zavrnemo.
- Ali lahko hipotezo H_0 zavrnemo tudi na stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

  V tem primeru dobimo:
  - $z_\alpha = 2.58$.
  - $Z_e \doteq -2.04$.
- Ker je $|-2.04| < 2.58$, o H_0 ne odločimo.

Testiranje populacijskega povprečja - primer

- Naj X meri porodno težo novorojenčkov in naj bo:
  - $n = 187$, $\overline{X} = 2946$, $S = 698$ in $\alpha = 0.05$.
  - $H_0 : \mu = 3000$ in $H_1 : \mu < 3000$.

  Testiraj ničelno hipotezo H_0 proti alternativi H_1.
- Rešitev:
  - Ker imamo velik vzorec, za testno statistiko izberemo:
  - $Z = \dfrac{\overline{X} - 3000}{S}\sqrt{n} \approx N(0,1)$.
  - Uporabimo enostranski test.
  - $z_\alpha = -1.65$.
  - $Z_e = \frac{2946-3000}{698}\sqrt{187} \doteq -1.06$.
- Ker je $-1.06 > -1.65$, o H_0 ne odločimo.
- $p = P(|Z| \geq 1.06) \doteq 0.289$.

  Ker je $\frac{p}{2} \doteq 0.14 > 0.05 = \alpha$, o H_0 ne odločimo.

Testiranje standardnega odklona (disperzije)

- Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$, kjer sta parametra μ in σ neznana.
- Za ničelno hiptezo izberemo $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.
- Za alternativno hipotezo običajno izberemo $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ (enostranski test).
- Stopnja značilnosti naj bo α (npr. $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0,01$ ali manj).
- Ker je $X \sim N(\mu, \sigma)$, za testno statistiko vzamemo:
  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$, kjer je
  - n velikost vzorca in
  - S^2 vzorčna disperzija.
- Če H_0 velja, se statistika χ^2 porazdeli po $\chi^2(n-1)$.

Kritično območje enostranskega testa

- Kritično območje enostranskega testa:
  - Izberemo tak χ^2_α, da velja $P(\chi^2(n-1) \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$ (tabela C).
  - $K_\alpha = [\chi^2_\alpha, \infty)$.
  - Npr. za $n = 15$ in $\alpha = 0.05$ dobimo $\chi^2_\alpha = 23,68$.
  - Izračunamo vrednost testne statistike χ^2 na vzorcu: χ^2_e.
  - Če je $\chi^2_e \geq \chi^2_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - Če je $\chi^2_e < \chi^2_\alpha$, o hipotezi H_0 ne odločimo.
- Če imamo velik vzorec, lahko za testiranje standardnega odklona uporabimo normalno aproksimacijo oz. Z-test, saj velja:
  $Z = \frac{S}{\sigma_0}\sqrt{2(n-1)} - \sqrt{2n-3} \approx N(0,1)$

Testiranje razlike povprečij odvisnih vzorcev

- Odvisna vzorca – podatki nastopajo v parih.
- Primer: n odraslih pingvinov smo stehtali v mesecu marcu (X) in avgustu (Y). Dobljene podatke predstavimo kot: $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
- Zanima nas, ali se teže značilno razlikujejo?
- Opazujemo razlike $D = X - Y$ in predpostavimo, da je $D \sim N(\mu, \sigma)$.
- Ničelna hipoteza: $H_0 : \mu = \mu_0$.
- Alternativna hipoteza: $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (lahko tudi $\mu > \mu_0$).
- Testna statistika: $T = \frac{\overline{D} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim S(n-1)$.
- Testiramo kot povprečje majhnega vzorca (Studentov T-test).

Testiranje razlike povprečij odvisnih vzorcev

- Za velike vzorce lahko uporabimo Z-test.
  Glej testiranje populacijskega povprečja.
- Opomba: Če je vzorec majhen in razlike niso normalno porazdeljene, izberemo nek neparametrični test za testiranje enakosti porazdelitev (npr. Wilcoxonov test s predznačenimi rangi).

Testiranje razlike povprečij neodvisnih vzorcev

- Povprečji testiramo pri dveh različnih vzorcih.
- Primer: Prvo skupino m odraslih pingvinov smo stehtali v mesecu marcu (X), drugo skupino n odraslih pingvinov pa v mesecu avgustu (Y).
- Zanima nas, ali se teže značilno razlikujejo?
- Predpostavimo, da velja $X \sim N(\mu, \sigma)$, $Y \sim N(\nu, \sigma)$.
- Ničelna hipoteza: $H_0 : \mu = \nu$.
- Alternativna hipoteza: $H_1 : \mu \neq \nu$ (lahko tudi $\mu > \nu$).
- Testna statistika: $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S} \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} \sim S(m+n-2)$, kjer je:
  - $S^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}$.
- Studentov T-test o enakosti povprečij.

Testiranje razlike povprečij neodvisnih vzorcev

- Kritično območje dvostranskega testa s stopnjo značilnosti α:
  - Izberemo tak t_α, da velja $P(|T| < t_\alpha) = 1 - \alpha$ (tabela B).
  - $K_\alpha = (-\infty, -t_\alpha] \cup [t_\alpha, \infty)$.
- Če sta vzorca velika, lahko uporabimo Z-test, saj velja:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}} \approx N(0,1).$$

- Opomba: Če je vzorec majhen ter X in Y nista normalno porazdeljeni, izberemo nek neparametrični test za testiranje enakosti porazdelitev (npr. Inverzijski ali Mann Whitneyjev test).

Test enakosti standardnih odklonov na različnih populacijah (test homogenosti)

- Predpostavimo, da je $X \sim N(\mu, \sigma)$ in $Y \sim N(\nu, \tau)$.
- Naj bo vzorec za X velikosti m, za Y pa n.
- Ničelna hipoteza: $H_0 : \sigma = \tau$.
- Alternativna hipoteza: $H_1 : \sigma \neq \tau$ (lahko tudi $\sigma > \tau$).
- Testna statistika: $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(m-1, n-1)$.
- Kritično območje dvostranskega testa s stopnjo značilnosti α:
  - Izberemo tak $f_{1,\alpha}$, da velja $P(F(m-1, n-1) \leq f_{1,\alpha}) = \alpha/2$.
  - Izberemo tak $f_{2,\alpha}$, da velja $P(F(m-1, n-1) \geq f_{2,\alpha}) = \alpha/2$. Uporabimo tabelo D.
  - Izračunamo vrednost testne statistike F na vzorcu: F_e.
  - Če je $F_e \leq f_{1,\alpha}$ ali $F_e \geq f_{2,\alpha}$, hipotezo H_0 zavrnemo in potrdimo H_1.
  - V nasprotnem primeru o hipotezi H_0 ne odločimo.

Test enakosti standardnih odklonov na različnih populacijah (test homogenosti)

- Naj X meri porodno težo novorojenčkov pri materah nekadilkah, Y pa pri materah kadilkah in naj velja $X \sim N(\mu, \sigma)$, $Y \sim N(\nu, \tau)$, $m = 114$, $n = 73$, $S_x = 733$, $S_y = 617$. Testiraj ničelno hipotezo $H_0 : \sigma = \tau$ proti alternativi $H_1 : \sigma \neq \tau$ na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.
- Rešitev:
  - $F(m-1, n-1) = F(113, 72)$.
  - $f_{1,\alpha} = 0.664$, $f_{2,\alpha} = 1.535$
  - $F_e = \frac{733^2}{617^2} \doteq 1.411$.
  - Ker je $0.664 < 1.411 < 1.535$, o hipotezi H_0 ne odločimo.