Vaje 9: Barvno kritični grafi

1. Naj bo G spoj grafov C_5 in K_s. Določite $\chi(G)$. Ali je G barvno kritičen graf?

2. Dokažite, da za vsak k-kritičen graf velja: $\delta(G) \geq k-1$.

3. Naj bo G k-kritičen graf. Dokažite, da veljata naslednji dve trditvi.

   (a) Za vsako vozlišče v grafa G obstaja dobro k-barvanje grafa G, v katerem ima en barvni razred le vozlišče v, v okolici vozlišča v ($N(v)$) pa se pojavi vseh ostalih $k-1$ barv.

   (b) Za vsako povezavo $e = xy$ grafa G velja, da vsako dobro $k-1$ barvanje grafa $G-e$ vozliščema x in y priredi enaki barvi.

4. Za vsak $n \geq 4$, $n \neq 5$, konstruirajte 4-kritičen graf na n vozliščih.

5. Dana sta grafa G in H. Naj bo $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $n \geq 2$. Naj bo $G \star H$ graf, ki ga dobimo na naslednji način. Najprej narišemo eno kopijo grafa G in n kopij grafa H, ki jih označimo s $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (kopija H_i ustreza vozlišču u_i). Nato za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vsa vozlišča kopije H_i povežemo z vsemi sosedi vozlišča u_i (z vsemi vozlišči iz $N_G(u_i)$).

   (a) Dokažite naslednjo trditev.
   Če je $\Delta(G) = n-1$, potem je $\chi(G \star H) = \chi(G) + \chi(H) - 1$.

   (b) Ali velja naslednja trditev?
   Če je $\Delta(G) = n-1$ ter sta grafa G in H barvno kritična, potem je tudi graf $G \star H$ barvno kritičen.