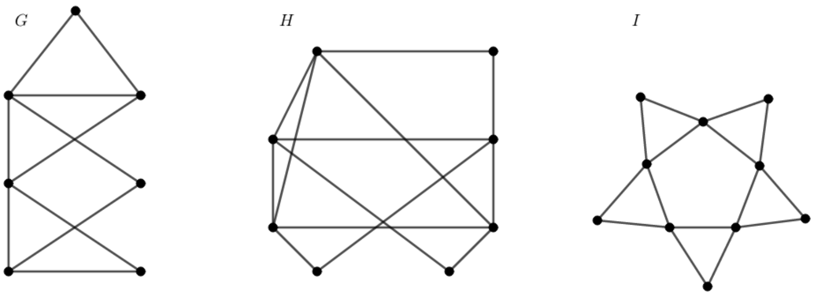
Vaje 5: Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

1. Kateri izmed grafov, prikazanih na sliki, so Eulerjevi? Utemeljite.



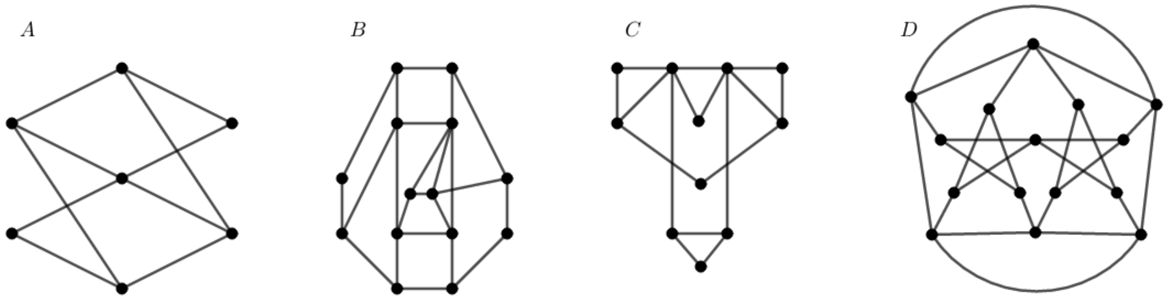
2. Dokažite, da je graf G Eulerjev natanko tedaj, ko je za vsako razbitje vozlišč grafa G na množici A in B, za kateri velja: $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$, $V(G) = A \cup B$, število povezav z enim krajiščem v A in drugim v B sodo, vendar ne enako 0.

3. Naj bo G poljuben graf z $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Iz grafa G tvorimo graf G^* z $V(G^*) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tako, da je $E(G) \subseteq E(G^*)$ in vsako vozlišče v_i je povezano z vsemi vozlišči iz $N_G(u_i)$. Povedano drugače, graf G^* dobimo iz grafa G tako, da grafu G dodamo vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in vsako vozlišče v_i povežemo z vsemi sosedi vozlišča u_i.

   (a) Narišite graf C_5^*.

   (b) Ali velja naslednja trditev? Dokažite ali navedite protiprimer. Če je graf G Eulerjev, potem je tudi graf G^* Eulerjev.

4. Kateri izmed grafov, prikazanih na sliki, so Hamiltonovi?



5. Naj bo G dvodelni Hamiltonov graf z dvodelnim razbitjem $V(G) = A \cup B$. Dokažite, da je $|A| = |B|$.

6. Dokažite, da Petersenov graf ni Hamiltonov.

7. Za vsako naravno število n definirajmo graf G_n z $V(G_n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ in $E(G_n) = \{ab;\ a + b \geq 6\}$.

   (a) Določite vsa naravna števila $n \geq 4$, za katera so grafi G_n Eulerjevi.

   (b) Določite vsa naravna števila $n \geq 4$, za katera so grafi G_n Hamiltonovi.

8. Za vsako naravno število n, $n \geq 3$, ugotovite, ali obstaja graf z n vozlišči, ki je Eulerjev, a ni Hamiltonov. V primerih, da graf obstaja, ga narišite, sicer utemeljite, da graf ne obstaja.