

Izpit pri predmetu **TEORIJA GRAFOV**  
17.6.2024

Čas reševanja je **120 minut**.

Vse odgovore je potrebno utemeljiti!

- [25] Naj bo  $G$  poljuben povezan graf z vsaj dvema vozliščema. Množico  $D \subseteq V(G)$  imenujemo *celotna dominantna množica* grafa  $G$ , če velja, da ima vsako vozlišče grafa  $G$  vsaj enega soseda v množici  $D$ . Velikost najmanjše celotne dominantne množice grafa  $G$  označimo z  $\gamma_t(G)$ .
  - Dokažite, da za vsak povezan graf  $G$  z vsaj dvema vozliščema velja:  
$$\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta(G)} \rceil.$$
  - Za vsako naravno število  $k \geq 2$  konstruirajte povezan graf  $G$  z lastnostjo, da je  $k = \gamma_t(G) = \lceil \frac{n}{\Delta(G)} \rceil$ .
- [25] Naj bo  $G$  povezan graf. Grafu  $G$  dodajmo povezave med vsemi tistimi pari vozlišč, ki so na razdalji 2 v  $G$ . Dobljeni graf označimo z  $G'$ . Dokažite, da je graf  $G'$  2-povezan.
- [25] Naj bo  $G$  tetivni graf in  $S$  množica vseh simplicialnih vozlišč tega grafa. Iz grafa  $G$  tvorimo enostaven graf  $G^*$  tako, da velja:  $V(G^*) = V(G)$  in  $E(G^*) = E(G) \cup \{ab; a, b \in V(G) \setminus S\}$ .
  - Navedite primer tetivnega grafa  $G$ , ki je izomorfen grafu  $G^*$ , ter primer tetivnega grafa  $H$ , ki ni izomorfen grafu  $H^*$ .
  - Karakterizirajte simplicialna vozlišča grafa  $G^*$  tvorjenega iz grafa  $G$ , ki ima lastnost, da so vsa vozlišča iz  $S$  paroma nesosednja.  
(Katera vozlišča iz  $S$  in katera iz  $V(G^*) \setminus S$  so simplicialna v  $G^*$ ?)
- [25] Dokažite, da za vsak  $m \geq 2$  velja:  $R(K_{1,m}, K_3) = 2m + 1$ .