

Vaje 10: Barvno kritični grafi

1. Naj bo G spoj grafov C_5 in K_s . Določite $\chi(G)$. Ali je G barvno kritičen graf?
2. Dokažite, da za vsak k -kritičen graf velja: $\delta(G) \geq k - 1$.
3. Naj bo G k -kritičen graf. Dokažite, da veljata naslednji dve trditvi.
 - (a) Za vsako vozlišče v grafa G obstaja dobro k -barvanje grafa G , v katerem ima en barvni razred le vozlišče v , v okolici vozlišča v ($N(v)$) pa se pojavi vseh ostalih $k - 1$ barv.
 - (b) Za vsako povezavo $e = xy$ grafa G velja, da vsako dobro $k - 1$ barvanje grafa $G - e$ vozliščema x in y priredi enaki barvi.
4. Za vsak $n \geq 4$, $n \neq 5$, konstruirajte 4-kritičen graf na n vozliščih.
5. Dana sta grafa G in H . Naj bo $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $n \geq 2$. Naj bo $G \star H$ graf, ki ga dobimo na naslednji način. Najprej narišemo eno kopijo grafa G in n kopij grafa H , ki jih označimo s H_1, H_2, \dots, H_n (kopija H_i ustreza vozlišču u_i). Nato za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vsa vozlišča kopije H_i povežemo z vsemi sosedi vozlišča u_i (z vsemi vozlišči iz $N_G(u_i)$).
 - (a) Dokažite naslednjo trditev.
Če je $\Delta(G) = n - 1$, potem je $\chi(G \star H) = \chi(G) + \chi(H) - 1$.
 - (b) Ali velja naslednja trditev?
Če je $\Delta(G) = n - 1$ ter sta grafa G in H barvno kritična, potem je tudi graf $G \star H$ barvno kritičen.