

## Vaje 7: Povezanost grafov

1. Dokažite, da za 3-regularne grafe velja:  $\kappa(G) = \lambda(G)$ .
2. Naj bo  $G$  graf z  $n$  vozlišči, za katerega velja:  $\delta(G) \geq n - 2$ .
  - (a) Dokažite, da za graf  $G$  velja:  $\kappa(G) = \delta(G)$ .
  - (b) Za vsako naravno število  $n \geq 5$  konstruirajte graf  $G$  z  $n$  vozlišči, za katerega velja:  $\delta(G) = n - 3$  in  $\kappa(G) < \delta(G)$ .
3. Naj bo  $G_{n,2k}$ , Harary-jev graf.

Opomba: Harary-jev graf  $G_{n,2k}$  je graf, kjer vozlišča predstavljajo oglišča  $n$ -kotnika, vsako vozlišče pa je povezano s  $k$  zaporedni vozlišči na svoji levi strani in s  $k$  zaporednimi vozlišči na svoji desni strani.

Dokažite, da je  $\kappa(G_{n,2k}) = 2k$ .
4. Naj bosta  $G_1$  in  $G_2$   $k$ -povezana grafa ter  $v_1 \in V(G_1)$ ,  $v_2 \in V(G_2)$  takšni vozlišči, da je  $\deg_{G_1}(v_1) = \deg_{G_2}(v_2) = k$ .

Iz disjunktnih kopij grafov  $G_1$  in  $G_2$  tvorimo graf  $H$  tako, da najprej iz grafa  $G_1$  odstranimo vozlišče  $v_1$  (in vse povezave s krajiščem  $v_1$ ), nato iz  $G_2$  odstranimo vozlišče  $v_2$  (in vse povezave s krajiščem  $v_2$ ), na koncu pa grafu dodamo poljubnih  $k$  povezav tako, da ima vsako vozlišče iz  $N_{G_1}(v_1)$  natanko enega soseda v  $N_{G_2}(v_2)$  ter vsako vozlišče iz  $N_{G_2}(v_2)$  natanko enega soseda v  $N_{G_1}(v_1)$  (dodane povezave predstavljajo prirejanje).

Dokažite, da je poljuben graf  $H$ , tvorjen na opisani način,  $(k - 1)$ -povezan graf.
5. Naj bo  $G$  graf, ki ne vsebuje podgrafov, izomorfnih grafu  $K_3$ , in naj bo  $\delta(G) \geq 3$ . Dokažite naslednjo trditev. Če je  $|V(G)| \leq 11$ , potem je  $\lambda(G) \geq 3$ .
6. Naj bosta  $G$  in  $H$  poljubna grafa.

Dokažite:  $\lambda(G \square H) \leq \min\{\lambda(G) \cdot |V(H)|, \lambda(H) \cdot |V(G)|, \delta(G) + \delta(H)\}$ .