

Teorija grafov

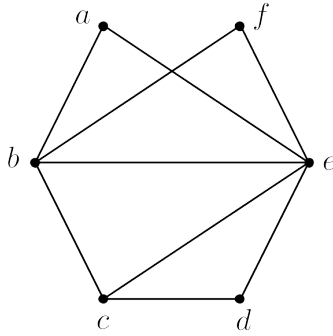
Študijsko leto: 2024/2025

Vaje 1: Ponovitev

- Narišite primer grafa G , ki ima naslednje lastnosti.
 - $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$, $N(x) = \{y, u, v\}$, $N(z) = \{u, v\}$, $\deg(u) = \deg(v) = 2$. Določite $\Delta(G)$ in $\delta(G)$.
 - Graf G ima pet vozlišč stopenj 1, 3, 3, 4, 4.
 - Graf G ima pet vozlišč, šest povezav, največjo stopnjo 3 in najmanjšo stopnjo 2.
- Naj bo G_n graf, za katerega je $V(G_n) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ in vozlišči $a, b \in V(G_n)$ sta povezani natanko tedaj, ko $3|ab$.
 - Narišite grafe G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 in G_6 .
 - Za grafe $G_n, n \in \mathbb{N}$, določite $\Delta(G_n)$ in $\delta(G_n)$.
- Dokažite, da ima graf G , $|V(G)| \geq 2$, vsaj dve vozlišči enake stopnje.
- Dokažite, da povezan r -regularen graf, kjer je r sodo število, nima mosta.
- Dokažite, da je zaporedje $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n-1, n-1, n, n$ zaporedje stopenj vozlišč grafa za vsako naravno število n .
- Naj bo G k -regularen dvodelen graf ($k > 0$) z dvodelnim razbitjem $V(G) = X + Y$. Dokažite, da velja: $|X| = |Y|$.
- Iz standardne 8×8 šahovnice odstranimo zgornji levi kvadrat in spodnji desni kvadrat. Dokažite, da dobljene deske ne moremo pokriti z 1×2 dominami tako, da se domine med seboj ne prekrivajo.
- Drevo T ima 10 vozlišč stopnje 4, vsa ostala vozlišča pa so stopnje 1. Določite število vozlišč in število povezav drevesa T .
- Naj bo \mathcal{T} družina dreves, ki imajo vsa notranja vozlišča stopnje 3. Dokažite, da imajo drevesa družine \mathcal{T} število listov za 2 večje od števila notranjih vozlišč.

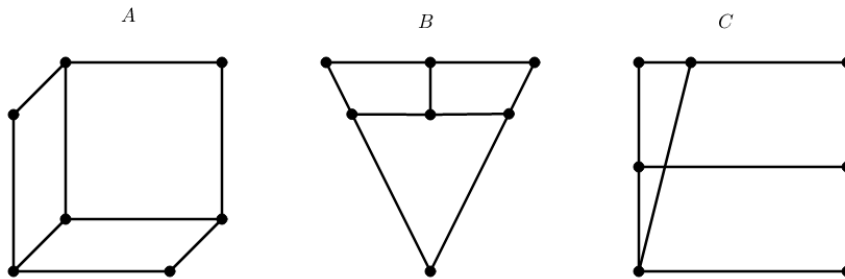
10. Na Sliki 1 je narisana graf G .

- (a) Narišite primer podgrafa J grafa G , ki je induciran le z vozlišči iz množice $\{a, b, e, f\}$.
- (b) Narišite primer vpetega podgrafa K grafa G , ki ima 6 povezav in $\delta(K) = 1$.



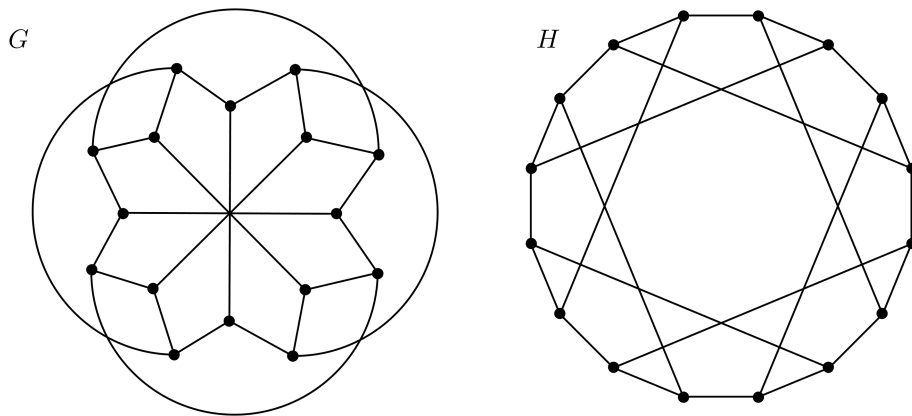
Slika 1: Graf G iz naloge 10

11. Obravnavajte vse pare grafov, prikazanih na Sliki 2. Ugotovite, kateri so izomorfni.

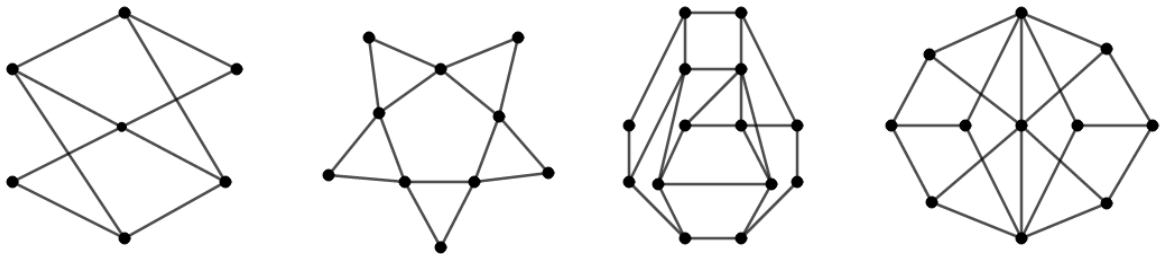


Slika 2: Grafi iz naloge 11

12. Ali sta grafa G in H , prikazana na Sliki 3, izomorfna? Utemeljite.
13. Kateri izmed grafov, prikazanih na Sliki 4, so Eulerjevi? In kateri so Hamiltonovi? Utemeljite.



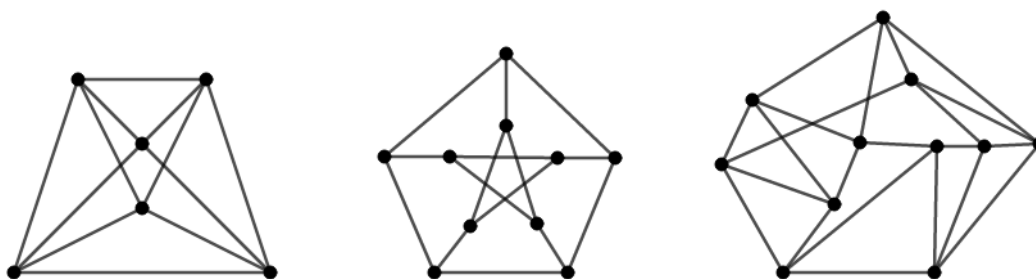
Slika 3: Grafa G in H iz naloge 12



Slika 4: Grafi iz naloge 13

14. Dokažite, da je graf G Eulerjev natanko tedaj, ko za poljubni množici A in B , kjer je $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$, velja, da je število povezav grafa G , ki imajo eno krajišče v množici A , drugo pa v množici B , enako številu $2k$, $k \geq 1$.
15. Naj bo G dvodelen Hamiltonov graf z dvodelno particijo $V(G) = A \cup B$. Dokažite, da je $|A| = |B|$.
16. Dokažite, da Petersenov graf ni Hamiltonov.
17. Povezavni graf $L(G)$ grafa G je graf, katerega vozlišča predstavljajo povezave grafa G ; dve vozlišči grafa $L(G)$ pa sta povezani natanko tedaj, ko sta pripadajoči povezavi v grafu G incidenčni.
 - (a) Dokažite, da velja naslednja trditev: če je graf G Eulerjev, potem je graf $L(G)$ Hamiltonov.
 - (b) Pokažite, da obrat trditve iz primera (a) v slošnem ne velja (konstruirajte graf G , da bo $L(G)$ Hamiltonov, G pa ne bo Eulerjev).

18. Kateri izmed grafov, prikazanih na Sliki 5, so ravninski? Utemeljite.



Slika 5: Grafi iz naloge 18