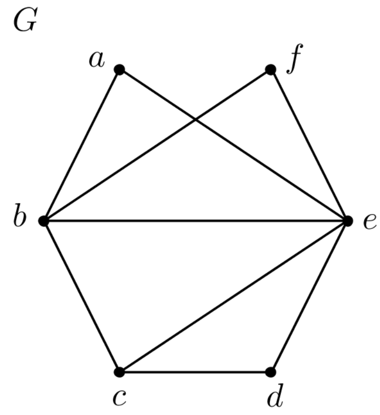
Teorija grafov

Študijsko leto: 2019/2020

Vaje 1: Ponovitev, 1.del

1. Narišite primer grafa G, ki ima naslednje lastnosti.
   (a) $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$, $N(x) = \{y, u, v\}$, $N(z) = \{u, v\}$, $deg(u) = deg(v) = 2$. Določite $\Delta(G)$ in $\delta(G)$.
   (b) Graf G ima pet vozlišč stopenj $1, 3, 3, 4, 4$.
   (c) Graf G ima pet vozlišč, šest povezav, največjo stopnjo 3 in najmanjšo stopnjo 2.
2. Naj bo G_n graf, za katerega je $V(G_n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ in vozlišči $a, b \in V(G_n)$ sta povezani natanko tedaj, ko $3|ab$.
   (a) Narišite grafe G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 in G_6.
   (b) Za grafe G_n, $n \in \mathbb{N}$, določite $\Delta(G_n)$ in $\delta(G_n)$.
3. Dokažite, da je zaporedje $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n-1, n-1, n, n$ zaporedje stopenj vozlišč grafa za vsako naravno število n.
4. Dokažite, da ima graf G, $|V(G)| \geq 2$, vsaj dve vozlišči enake stopnje.
5. Dokažite, da povezan r-regularen graf, kjer je r sodo število, nima mosta.
6. Naj bo G k-regularen dvodelen graf ($k > 0$) z dvodelnim razbitjem $V(G) = X + Y$. Dokažite, da velja: $|X| = |Y|$.
7. Iz standardne 8×8 šahovnice odstranimo zgornji levi kvadrat in spodnji desni kvadrat. Dokažite, da dobljene deske ne moremo pokriti z 1×2 dominami tako, da se domine med seboj ne prekrivajo.
8. Drevo T ima 10 vozlišč stopnje 4, vsa ostala vozlišča pa so stopnje 1. Določite število vozlišč in število povezav drevesa T.
9. Naj bo $\mathcal{T}$ družina dreves, ki imajo vsa notranja vozlišča stopnje 3. Dokažite, da imajo drevesa družine $\mathcal{T}$ število listov za 2 večje od števila notranjih vozlišč.
10. Naj bo $F = (V, E)$ gozd s c komponentami. Dokažite: $|E(F)| = |V(F)| - c$.



Slika 1: Graf G iz naloge 13

11. Naj bo T drevo, ki ni poln graf. Za vsak $i \in \{1, 2, \dots, \Delta(T)\}$ označimo z v_i število vozlišč drevesa T, ki imajo stopnjo i. Dokažite, da drevo T premore natanko $v_3 + 2v_4 + \dots + (\Delta(T) - 2) \cdot v_{\Delta(T)} + 2$ listov.

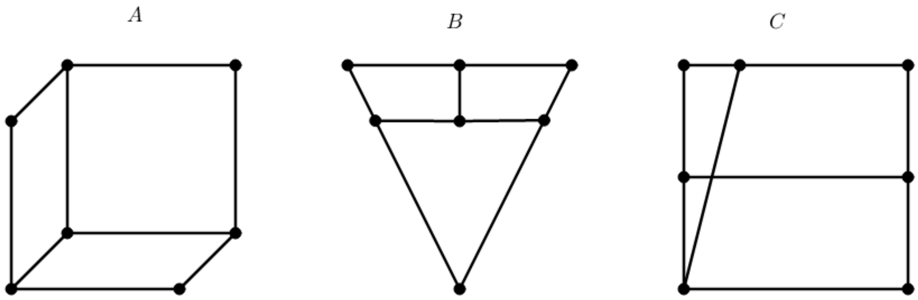
12. Naj bo $\mathcal{U}$ poljubna končna množica in $\mathcal{D}$ neka neprazna družina njenih podmnožic. Definirajmo graf G takole: $V(G) = \mathcal{D}$ in $E(G) = \{\mathcal{AB}; \mathcal{A} \neq \mathcal{B}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$. Graf G imenujemo *presečni graf družine* $\mathcal{D}$.
    Katerim znanim grafom sta izomorfna presečna grafa družine $\mathcal{D}$, kjer je:
    (a) $\mathcal{D}$=$\{\{i, i+1\}; i = 1, 2, \dots, n-1\}$;
    (b) $\mathcal{D}$ družina vseh $(n-1)$-elementarnih podmnožic n-elementarne množice.

13. Na Sliki 1 je narisan graf G.
    (a) Narišite primer podgrafa J grafa G, ki je induciran le z vozlišči iz množice $\{a, b, e, f\}$.
    (b) Narišite primer vpetega podgrafa K grafa G, ki ima 6 povezav in $\delta(K) = 1$.

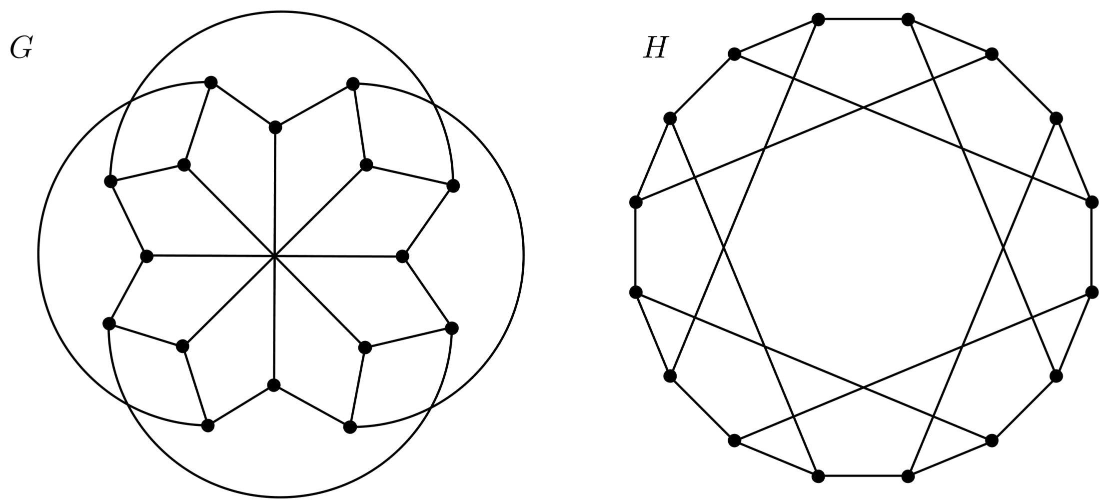
14. Obravnavajte vse pare grafov, prikazanih na Sliki 2. Ugotovite, kateri so izomorfni.

15. Ali sta grafa G in H, prikazana na Sliki 3, izomorfna? Utemeljite.

16. Naj bo G graf, ki je izomorfen svojemu komplementu. Dokažite, da je $|V(G)| = 4k$ ali $|V(G)| = 4k + 1$, kjer je k neko naravno število.



Slika 2: Grafi iz naloge 14



Slika 3: Grafa G in H iz naloge 15