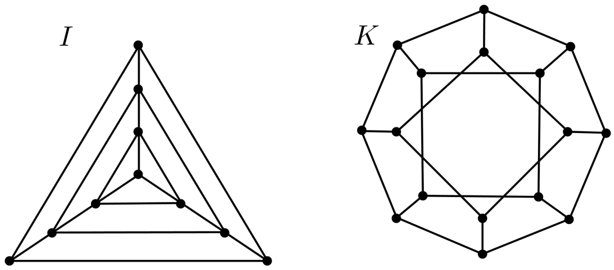
Vaje 6: Barvanje vozlišč in povezav grafov

1. Določite kromatična števila grafov I in K, prikazanih na Sliki 1.



Slika 1: Grafa iz naloge 1

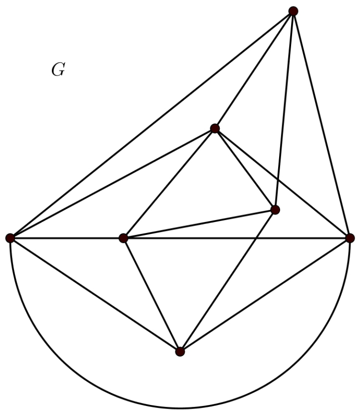
2. Določite kromatično število grafa $G = (V, E)$ z $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ in $E(G) = \{uv;\ u + v \text{ je praštevilo}\}$.

3. Dokažite.

   (a) Za vsak graf G velja: $\chi(G) \leq |V(G)| - \alpha(G) + 1$.

   (b) Naj bo $v \in V(G)$. Če je $deg(v) < \chi(G - v)$, potem je $\chi(G) = \chi(G - v)$.

4. Določite kromatični indeks grafa G s Slike 2.



Slika 2: Graf G iz naloge 4

5. Naj bo $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definirajmo graf $G_{n,k}$ takole:

$$V(G_{n,k}) = \{Y \subseteq X;\ |Y| = k\},$$

$$E(G_{n,k}) = \{Y_1Y_2;\ Y_1, Y_2 \in V(G_{n,k}) \text{ in } |Y_1 \cap Y_2| = 1\}.$$

   (a) Narišite graf $G_{4,2}$.

   (b) Določite kromatični indeks in kromatično število grafa $G_{4,2}$.

   (c) Graf $G_{n,k}$ je x-regularen. Določite x.

6. Graf Sierpińskega S_k^n (z bazo k in dimenzijo n) je definiran takole: $V(S_k^n) = \{1, 2, \ldots, k\}^n$. Dve različni vozlišči $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pa sta povezani natanko tedaj, ko obstaja $h \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

   (a) $u_t = v_t$ za vsak $t \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$;

   (b) $u_h \neq v_h$;

   (c) $u_t = v_h$ in $v_t = u_h$ za vsak $t \in \{h+1, \ldots, n\}$.

   Narišite grafa S_3^3 in S_4^2. Izračunajte $\chi(S_3^n)$ in $\chi'(S_k^n)$ za primere, ko je k sodo število.

7. Dokažite, da so 3-regularni Hamiltonovi grafi tipa 1.

8. Naj bo G regularen graf, ki premore presečno vozlišče.
   Dokažite: $\chi'(G) > \Delta(G)$.