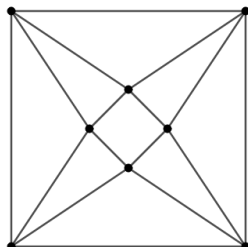


Vaje 7: Kritični grafi

1. Določite kromatično število grafa G s Slike 1. Ali je graf G barvno kritičen?



Slika 1: Graf G iz naloge 1

2. Naj bo G spoj grafov C_5 in K_s . Določite $\chi(G)$ in $\omega(G)$. Ali je G barvno kritičen graf?
3. Dokažite, da za vsak k -kritičen graf velja: $\delta(G) \geq k - 1$.
4. Naj bo G k -kritičen graf ter u in v nesosednji vozlišči tega grafa. Dokažite, da obstaja k -barvanje grafa G , v katerem vozlišči u in v prejmeta enaki barvi, in tudi takšno k -barvanje grafa G , v katerem vozlišči u in v prejmeta različni barvi.
5. Naj bo G k -kritičen graf. Dokažite, da veljata naslednji dve trditvi.
 - (a) Za vsako vozlišče v grafa G obstaja dobro k -barvanje grafa G , v katerem ima en barvni razred le vozlišče v , v okolici vozlišča v ($N(v)$) pa se pojavi vseh ostalih $k - 1$ barv.
 - (b) Za vsako povezavo $e = xy$ grafa G velja, da vsako dobro $k - 1$ barvanje grafa $G - e$ vozliščema x in y priredi enaki barvi.
6. Naj bo G k -kritičen graf. Dokažite, da G nima presečne množice z vsemi paroma sosednjimi vozlišči.
7. Za vsak $n \geq 4$, $n \neq 5$, konstruirajte 4-kritičen graf na n vozliščih.
8. Naj bo G k -kromatičen graf brez trikotnikov. Dokažite, da je graf G' , dobljen z Mycielski-jevo konstrukcijo iz grafa G , $(k + 1)$ -kromatičen graf brez trikotnikov.

9. Naj bo $G_{n,2k}$ Harary-jev graf, $n \geq k(k+1)$ in $(k+1)|n$.
Opomba: Harary-jev graf $G_{n,2k}$ je graf, kjer vozlišča predstavljajo oglišča n -kotnika, vsako vozlišče pa je povezano s k zaporedni vozlišči na svoji levi strani in s k zaporednimi vozlišči na svoji desni strani.
- (a) Dokažite, da velja: $\chi(G_{n,2k}) = k + 1$.
 - (b) Ali so takšni grafi $G_{n,2k}$ barvno kritični? Utemeljite.