1. sklop nalog: Geometrijski vektorji

1. Naj za točke $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ velja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Podaj vsaj dve lastnosti, ki govorita o medsebojni legi točk A, B in C.

2. Naj bosta A in B različni točki v prostoru $\mathbb{R}^3$ in A', B' točki, ki ju dobimo z vzporednim premikom točk A in B za vektor $\vec{c}$. Ugotovi in utemelji, katere od spodaj podanih enakosti veljajo in katere ne veljajo.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}, \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}, \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'B}.$$

3. Naj bodo A, B, C in D poljubne točke iz prostora $\mathbb{R}^3$. Poenostavi izraza (zapiši izraz v obliki enega vektorja).

   (a) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

   (b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

4. Podan je kvader $ABCDA'B'C'D'$. Poenostavi izraze.

   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'D'}$

   (b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CB}$

   (c) $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{C'B}$

   (d) $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'C}$

   (e) $\overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'B}$

   (f) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CB'}$

5. V trikotniku ABC naj bo M razpolovišče stranice BC in Q točka, ki deli stranico AC v razmerju $1 : 2$ $\big(|AQ| : |QC| = 1 : 2\big)$. Naj bo E točka, ki jo dobimo pri zrcaljenju točke B čez točko A. Dokaži, da so točke M, Q in E kolinearne.

6. V trikotniku ABC naj bo CD težiščnica na stranico c. Razpolovišče daljice CD označimo z E. Premica skozi A in E seka stranico BC v točki M. V kakšnem razmerju deli točka M daljico BC?

7. Podana je piramida $ABCD$ (skica). Naj bo točka T težišče trikotnika ABC in točka W težišče trikotnika ABD. Dokaži, da sta vektorja $\overrightarrow{TW}$ in $\overrightarrow{CD}$ vzporedna.

8. Podan je štirikotnik $PQRS$. Ugotovi, za kakšen štirikotnik gre, če velja

   (a) $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{QR} = \vec{0}$.

   (b) Vektorja $\overrightarrow{SP}$ in $\overrightarrow{QR}$ sta kolinearna.

9. V ravnini so podane štiri točke A, A', B in B'. Naj bo M razpolovišče daljice AA' in N razpolovišče daljice BB'. Dokaži, da velja

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}.$$

   Opomba. V primeru, ko je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = 0$, je $\overrightarrow{MN} = 0$, torej $M = N$. Kateri znani trditvi, ki velja za posebne štirikotnike, je ekvivalentna ta trditev?

10. Podana sta paralelograma $ABCD$ in $A'B'C'D'$. Označimo z M, N, P in Q zaporedoma razpolovišča daljic AA', BB', CC' in DD'. Dokaži, da je štirikotnik $MNPQ$ paralelogram.

11. Podan je trikotnik ABC s težiščnicami AM, BN in CP.

    (a) Izrazi vektorje $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ in $\overrightarrow{CP}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

    (b) Ali obstaja trikotnik napet na vektorje $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ in $\overrightarrow{CP}$.

Dodatne naloge:

1. Podan je kvader $ABCDA'B'C'D'$. Označimo $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} := \overrightarrow{AA'}$. Nariši skico in na njej označi točke U, V, W, X, Y, Z, za katere velja

    (a) $\overrightarrow{AU} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

    (b) $\overrightarrow{DV} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

    (c) $\overrightarrow{BW} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

    (d) $\overrightarrow{CX} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

    (e) $\overrightarrow{B'Y} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

    (f) $\overrightarrow{C'Z} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

2. Dokaži, da je štirikotnik $ABCD$ paralelogram, če za poljubno točko T v ravnini velja

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TD}.$$

    Dokaži tudi obratno trditev: če tvorijo točke A, B, C, D paralelogram, potem za poljubno točko velja zgoraj zapisana enakost.

3. Podan je trapez $ABCD$. Naj bo točka E razpolovišče daljice AB in točka S razpolovišče stranice CD. Naj bosta točki F in G taki točki ravnine, da je $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EG}$. Dokaži, da ležijo točke F, G in S na isti premici.

Literatura

[1] P. Legiša: Matematika: drugi letnik, DZS, Ljubljana 1995.

[2] M. Prosen, M. Strnad: Matematika, zbirka nalog za srednje šole: VEKTORJI, DZS (več izdaj)

[3] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[4] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[5] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.