10. sklop nalog: Uporaba determinante

1. Dokaži, da sta A in B obrnljivi matriki natanko tedaj, ko je AB obrnljiva matrika.
2. Izračunaj A^{-1} z uporabo formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T$.
3. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži, da je $\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$.
4. Naj bo A poševno simetrična realna matrika velikosti $n \times n$, kjer je n liho število. Ali je matrika A obrnljiva?
5. Pravimo, da sta matriki A in B podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika P, da velja $B = P^{-1}AP$. Dokaži, da imata podobni matriki enako determinanto.
6. S pomočjo Cramerjevega pravila obravnavaj in reši linearni sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}.$$

Dodatne naloge

1. Vse matrike v nalogi so elementi algebre $M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Dokaži, da je A podobna matriki B natanko tedaj, ko je B podobna matriki A.
   (b) Naj bosta A, B poljubni matriki in naj bo vsaj ena od njiju obrnljiva. Dokaži, da sta matriki AB in BA podobni.
   (c) Naj bo A obrnljiva matrika. Dokaži, da je tudi matrika B, ki je podobna matriki A, obrnljiva.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.