2. sklop nalog: Linearna kombinacija

1. Podan je trikotnik ABC. Naj bo B' točka, ki jo dobimo z zrcaljenjem točke B čez točko A. Naj točka M leži na stranici BC in naj bo N presečišče daljice MB' in stranice AC. Izračunaj razmerje $|AN| : |AC|$, če velja

   (a) M je razpolovišče stranice BC.

   (b) $|BM| : |BC| = k$, kjer je $k \in (0, 1)$.

2. Dokaži trditev: če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni, potem so tudi vektorji $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ in $\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni.

3. Vektor $\vec{a} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$ razstavi v smeri vektorjev $\vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ in $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

4. Ali so vektorji $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ in $\vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ komplanarni?

5. Določi vse vrednosti $s, t \in \mathbb{R}$, za katere bosta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ in $\vec{b} = 2t\vec{i} + s\vec{j} + (3t - s)\vec{k}$ kolinearna.

6. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ določata trikotnik. V kakšnem razmerju simetrala kota, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$, razdeli nasprotno stranico?

7. Podan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$ in $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ter $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

   (a) Vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FC}$ izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) V kakšnem razmerju deli diagonala BD diagonalo AC?

8. Dokaži, da se telesni diagonali paralelepipeda, ki ga določajo nekomplanarni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, sekata?

9. Podan je paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$. Naj bo točka E presečišče diagonal ploskve $BCC'B'$. V kakšnem razmerju razdeli paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

10. Naj bo $ABCDA'B'C'D'$ paralelepiped. Dokaži, da njegova telesna diagonala AC' prebada ravnino, ki jo določajo točke B, A' in D, v težišču trikotnika $BA'D$.

Dodatne naloge

1. Podana je tristrana piramida $ABCD$. Naj bo E razpolovišče stranice AB, F razpolovišče stranice AC in T težišče trikotnika EFD. Naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

   (a) Zapiši vektor $\overrightarrow{AT}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$.

   (b) Naj bo S presečišče nosilke daljice AT in trikotnika CBD. V kolikšnem razmerju deli točka T daljico AS?

2. Podan je paralelepiped $ABCDEFGH$ napet na vektorje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Naj bo T točka na nosilki daljice CG, za katero velja $\overrightarrow{GT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ in naj bo S presečišče daljice AT in ravnine, ki jo določajo točke E, F in G.
   (a) Zapiši vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, in $\vec{c}$.
   (b) Izračunaj razmerje $|AS| : |ST|$.
   (c) Ugotovi in utemelji, ali točka S leži na daljici EG.
3. Podan je paralelogram $ABCD$. Na daljici AB leži točka B' in na daljici AD leži točka D'. Skozi točko B' potegnemo vzporednico z AD in skozi D' potegnemo vzorednico z AB, le-ti se sekata v točki C'. Dokaži, da se nosilke daljic $B'D$, BD' in CC' sekajo v eni točki.

Literatura

[1] P. Legiša: Matematika: drugi letnik, DZS, Ljubljana 1995.

[2] M. Prosen, M. Strnad: Matematika, zbirka nalog za srednje šole: VEKTORJI, DZS (več izdaj)

[3] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[4] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[5] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.