3. sklop nalog: Skalarni, vektorski in mešani produkt

1. Izračunaj dolžino vektorjev $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, njun skalarni produkt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ in kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

2. Kolikšen kot tvori telesna diagonala kocke z osnovno ploskvijo kocke in kolikšen z osnovno stranico kocke.

3. Naj bosta a, b stranici paralerograma in e, f njegovi diagonali.

   (a) Dokaži, da velja enakost $e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.

   (b) Dokaži, da je paralerogram romb natanko tedaj, ko se njegovi diagonali sekata pod pravim kotom.

4. Naj za vektorje $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ velja $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$. Izračunaj $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} + \overrightarrow{c}\overrightarrow{a}$.

5. Izračunaj $(((\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) \times \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{k}$.

6. Paralerogram določata diagonali $\overrightarrow{e} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$. Izračunaj ploščino paralerograma.

7. Naj bodo $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ paroma nekolinearni vektorji. Dokaži, da je $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ natanko tedaj, ko velja $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

8. Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna vektorja. Reši vektorsko enačbo
$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x})(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}.$$

9. Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\overrightarrow{a} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{b} = (-1,2,0)$ in $\overrightarrow{c} = (0,1,1)$.

10. Izračunaj volumen tristrane piramide, ki jo določajo točke $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(1,0,0)$ in $D(-3,1,1)$. Volumen izrazi z ustreznim mešanim produktom.

11. Naj bo $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = 1$. Izračunaj $\left[2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}, 3\overrightarrow{c} + 4\overrightarrow{a}\right]$.

12. Dana sta vektorja $\vec{x} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ in $\vec{y} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Določi vektor $\vec{z}$, da bo pravokoten na vektor $\vec{y}$, da bo njegova dolžina $2\sqrt{11}$, in da bo volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{x}, \vec{y}$ in $\vec{z}$, enak 12. Koliko rešitev dobiš?

13. Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Ugotovi, kdaj je rešljiva vektorska enačba
$$(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{a}$$
in jo reši.

Dodatne naloge

1. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna vektorja v prostoru $\mathbb{R}^3$. Reši vektorsko enačbo
$$\vec{x} \times (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{a} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{b}.$$

2. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot 60° in imata enako dolžino. Reši vektorsko enačbo
$$(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{x}.$$

3. Naj bodo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ paroma pravokotni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami $|\overrightarrow{a}| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 1$ in $|\overrightarrow{c}| = 3$. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji
$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\,, \quad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}\,, \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\,.$$

Literatura

[1] P. Legiša: Matematika: drugi letnik, DZS, Ljubljana 1995.

[2] M. Prosen, M. Strnad: Matematika, zbirka nalog za srednje šole: VEKTORJI, DZS (več izdaj)

[3] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[4] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[5] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.