5. sklop nalog: Vektorji v $\mathbb{R}^n$ - vektorski prostor, podprostor in baza

1. Opiši vse podprostore vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.

2. Ugotovi in utemelji, katere od naslednjih množic so podprostori vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$.

   (a) $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$,

   (b) $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$,

   (c) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$,

   (d) $Z = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$,

   (e) $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$.

3. Dokaži, da je množica $\mathcal{B} = \{(1,1,\dots,1,1), (1,1,\dots,1,0), (1,1,\dots,0,0), \dots, (1,0,\dots,0,0)\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$.

4. Dokaži, da je množica $\mathcal{B} = \{(1,1,1,0), (1,2,3,1), (2,-1,,1,1), (0,0,0,1)\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$ in zapiši vektor $(1,-2,5,1)$ v obliki linearne kombinacije vektorjev iz $\mathcal{B}$.

5. (a) Opiši vektorski prostor $\mathcal{L}(\{(1,2,3,4\})$ in ugotovi, ali je kateri od vektorjev $(4,3,2,1)$ in $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, -1\frac{1}{3})$ vsebovan v $\mathcal{L}(\{(1,2,3,4)\})$.

   (b) Zapiši kak primer baze vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$, ki vsebuje vektor $(1,2,3,4)$.

   (c) Dopolni množico $\mathcal{C} = \{(1,2,1,2), (2,-1,-1,2)\}$ do baze vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$.

   (d) Ugotovi in utemelji, ali je kateri od vektorjev $(-1, -\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -3))$ in $(\frac{1}{2}, -1, 2, \frac{1}{2})$ vsebovan v vektorskem prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{C})$.

6. Podana je množica $U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$.

   (a) Dokaži, da je U podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^5$.

   (b) Določi dimenzijo in zapiši kak primer baze vektorskega prostora U.

   (c) Dopolni bazo prostora U (iz (b) primera) do baze prostora $\mathbb{R}^5$.

7. Določi dimenzije in zapiši kak primer baz za tiste od množic iz 2. naloge, ki so vektorski prostori.

8. Podani sta množici $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0\}$ in $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0, x_2 = 0\}$.

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska prostora.

   (b) Določi dimenzije in zapiši primere baz vektorskih prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

Dodatne naloge

1. Podani sta množici

$$U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_4 + x_5,\ x_2 - x_4 = 0\}$$
$$V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2,\ x_3 = 0,\ x_4 = x_5\}.$$

   (a) Dokaži, da sta U in V podprostora vektorskega prostora $\mathbb{R}^5$.

   (b) Določi dimenzije in zapiši primere baz prostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

   (c) Ali je vektor $(3, 3, 2, 1, 1)$ vsebovan v prostoru $U + V$? Odgovor utemelji.

2. Podana je množica

$$U = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid x_2 = 0,\ x_5 - x_6 = 0\}$$

   in podprostor

$$V = \mathcal{L}\{(0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 1)\}.$$

   (a) Dokaži, da je U podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^6$.

   (b) Določi dimenzije in zapiši primere baz prostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.