6. sklop nalog: Matrike

1. Podane so realne matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj matrike, ki obstajajo: $X + X^T$, $A + B$, AB, BA, AX, $X^T X$, XX^T, $2A + C^T$, $X^T C$.

2. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko zapisati v obliki $\alpha I + \beta A$, kjer sta α in β realni števili.

3. Poišči vse realne 2×2 matrike A z lastnostjo $A^2 = I$.

4. Za naravno število n izračunaj A^n, kjer je

   (a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & \sin x & 0 \end{bmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Dokaži, da sta A in B obrnljivi matriki natanko tedaj, ko je AB obrnljiva matrika.

6. Dokaži: če sta A in B obrnljivi matriki, ki komutirata, potem tudi matrike A, B, A^{-1}, B^{-1} med sabo komutirajo.

7. Matrika A je simetrična, če je $A^T = A$ in je poševno simetrična, če je $A^T = -A$.

   (a) Zapiši splošna primera realne 3×3 simetrične in poševno simetrične matrike.
   (b) Kakšne so naslednje matrike: $A + A^T$, $A - A^T$, $A^T A$?
   (c) Naj bosta A in B simetrični matriki. Kaj lahko poveš o matriki $AB - BA$?
   (d) Naj bo A simetrična obrnljiva matrika. Kaj lahko poveš o matriki A^{-1}?

8. Matrika A je nilpotentna, če je $A^m = 0$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Naj bosta A in B nilpotentni $n \times n$ matriki, ki komutirata. Dokaži, da sta potem tudi AB in $A + B$ nilpotentni matriki.

9. Naj bo A nilpotentna matrika za katero je $A^{n+1} = 0$ in $A^n \neq 0$. Pokaži, da je potem $I - A$ obrnljiva matrika in $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^n$.

10. Za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiramo njeno sled s predpisom

$$\operatorname{sled} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\,.$$

   (a) Dokaži, da za matriki A in B ter skalarja λ, μ velja:

   $$\operatorname{sled}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{sled} A + \mu \operatorname{sled} B \quad \text{in} \quad \operatorname{sled}(AB) = \operatorname{sled}(BA)\ .$$

   (b) Če je B obrnljiva matrika, pokaži, da je $\operatorname{sled}\left(B^{-1}AB\right) = \operatorname{sled} A\,.$

   (c) Ali obstajata taki matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, da je $AB - BA = I$?

Dodatne naloge

1. Naj bosta A in B matriki razsežnosti 2×2, ki komutirata z matriko

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Pokaži, da je $AB = BA$.

2. Matriko A imenujemo ortogonalna matrika, če velja $AA^T = A^TA = I$.

   (a) Pokaži, da je

   $$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

   ortogonalna matrika dimenzije 3×3.

   (b) Dokaži, da je produkt ortogonalnih matrik spet ortogonalna matrika.

   (c) Dokaži, da je inverzna matrika k ortogonalni matriki spet ortogonalna matrika.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.