9. sklop nalog: Determinanta

1. Permutacija $\pi_n \in S_{2n}$ je določena s predpisom:

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Zapiši permutaciji π_3 in π_4 kot produkt ločenih ciklov in kot produkt transpozicij. Določi še predznak permutacij π_3 in π_4.

2. Permutacija $\pi \in S_8$ je določena s produktom ciklov

$$\pi = (1\ 2\ 3\ 5)\,(6\ 5\ 4\ 3)\,(6\ 4)\,.$$

Zapiši jo kot produkt ločenih ciklov in kot produkt transpozicij. Določi tudi njen predznak.

3. Samo z uporabo definicije determinante izračunaj:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

4. S pomočjo razvoja determinante po vrstici oz. stolpcu izračunaj

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -t \end{vmatrix}$$

5. Vemo, da so števila 20604, 53227, 25755, 20927 in 78421 deljiva z 17. Dokaži, da je tudi naslednja determinanta deljiva z 17

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. S pomočjo Gaussove eliminacije izračunaj determinanti

   (a)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

7. S pomočjo rakurzivne formule izračunaj determinanto

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

8. Poišči splošna člena zaporedij, ki sta podani rekurzivno:

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ in $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$,

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ in $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

9. Dokaži, da za naslednjo determinato velikosti $2n \times 2n$ velja:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & b \\ 0 & a & & \cdots & \cdots & & b & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & a & b & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & b & a & & \vdots & \vdots \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & b & & \cdots & \cdots & & a & 0 \\ b & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2\right)^n.$$

Dodatne naloge

1. Naj bo a realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} -a & 2a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 2a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Reši enačbo:

$$\begin{vmatrix} -x+2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & x+3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & x+(n-2) & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n-2 & x+(n-1) & 1 \\ 4 & 6 & \cdots & 2\,(n-2) & 2\,(n-1) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^n & 2x^2+x \\ x^{n-2} & x \end{vmatrix}.$$

3. Dokaži, da za naslednjo determinato velikosti $2n \times 2n$ velja:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{b}{2n} \\ 0 & \frac{a}{4} & \cdots & \cdots & \frac{b}{2(2n-1)} & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \frac{a}{n^2} & \frac{b}{n(n+1)} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{b}{n(n+1)} & \frac{a}{(n+1)^2} & \vdots & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \frac{b}{2(2n-1)} & \cdots & \cdots & \frac{a}{(2n-1)^2} & 0 \\ \frac{b}{2n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a}{4n^2} \end{vmatrix} = \frac{\left(a^2-b^2\right)^n}{(2n!)^2}.$$

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1992. (več izdaj)

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.