Finančno-aktuarska matematika
in
Finančna matematika
2. del

Marko Jakovac

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru
Slovenija

OSNOVNI PODATKI

- E-mail: marko.jakovac@um.si.
- Govorilne ure: po dogovoru na e-mail, ali MS Teams.
- Kabinet: 0/95.
- Termin predavanj: torek 10:00-13:30 (1 odmor).
- Vaje: Martina Berlič Horvat.
- Termin vaj: petek, 8:00-10:00.

LITERATURA:

- H. U. Gerber: Life Insurance Mathematics.
- H. U. Gerber: Matematika življenskih zavarovanj.
- N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt: Actuarial Mathematics.
- A. Olivieri, E. Pitacco: Introduction to Insurance Mathematics.

PREGLED VSEBIN

1. MATEMATIČNE OSNOVE AKTUARSTVA

1.1 Uvodni pojmi

- Aktuarska matematika je veda, ki se ukvarja z uporabo verjetnosti in statistike v zavarovalništvu (npr. izračun premije za neko zavarovanje, ocena tveganja za nek dogodek).
- Delimo jo na <u>življenjska</u> in <u>neživljenjska</u> zavarovanja.
- Pri življenjskih zavarovanjih praviloma uporabljamo tudi obrestno mero, če jih proučujemo za daljše obodobje, medtem ko pri neživljenjskih zavarovanjih obrestne mere ne potrebujemo. Običajno so ta zavarovanja za krajše obdobje (npr. nekaj dni, eno leto).
- Aktuarska matematika uporablja ista orodja kot finančna matematika (ekvivalenca vseh vplačil in izplačil v nekem trenutku).

1.1 Uvodni pojmi

- Finančna matematika uporablja izračune, ki so neodvisni od naključnih dogodkov (npr. smrt osebe, pojav požara, strmoglavljenje letala), medtem ko so naključni dogodki osnova skoraj vseh izračunov v aktuarski matematiki. Slednja se ukvarja predvsem s tem, kako ustrezno zavarovati naključne dogodke.
- Pri tem se srečujemo s problemom napovedi zavarovanega naključnega dogodka (ne vemo, kdaj bo oseba umrla, kdaj bo izbruhnil požar, kdaj bo strmoglavilo letalo,...).
- Te probleme uspešno rešujemo s pomočjo verjetnosti in statistike. V primeru življenjskih zavarovanj pa predvsem s pomočjo tablic smrtnosti in komutacijskih števil.

1.2 Zakon velikih števil

- V teoriji verjetnosti je zakon velikih števil izrek, ki opisuje obnašanje rezultatov pri izvedbi eksperimenta, ki smo ga ponovili velikokrat.
- Izrek pove, da je povprečje vseh rezultatov pri velikem številu ponovitev poskusa blizu teoretični pričakovani vrednosti.
- Zakon velikih števil je pomemben, ker zagotavlja stabilnost podatkov, natančneje eksperimentalnega povprečja, pri velikem številu ponovitev poskusa.

1.2 Zakon velikih števil

Primer

(1) Pri metanju poštene igralne kocke lahko pade 1, 2, 3, 4, 5 in 6 z enako verjetnostjo $\frac{1}{6}$. Teoretična pričakovana vrednost povprečja je enaka

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$$

V praksi bi ugotovili, da je po nekaj metih kocke eksperimentalna vrednost povprečja $\overline{x} \neq \mu = 3,5$. Ali to pove, da nismo metali poštene igralne kocke?
Zakon velikih števil pove, če bomo poskus s pošteno igralno kocko ponovili velikorat, se bo vrednost $\overline{x}$ stabilizirala in približala vrednosti $\mu = 3,5$.
Virtual Laboratory in Probability and Statistics

1.2 Zakon velikih števil

Primer

(2) Denimo, da imamo 8 ljudi starih 20 let, pri čemer jih v naslednjem letu umre 6. Smrtnost v 21. letu starosti je 75%. Kljub temu iz tega podatka ne moremo izpeljati zaključka, da je smrtnost oseb v 21. letu starosti enaka 75%. Razlog je, da smo opazovali majhno število ljudi. Če bi npr. opazovali 100.000 ljudi starih 20 let, bi ugotovili, da jih je v 21. letu starosti umrlo le majhen delež. Za pravilno interpretacijo ponovno potrebujemo zakon velikih števil.

1.2 Zakon velikih števil

Primer

(3) Opazovali smo pojav števila 1 pri metu poštene igralne kocke in računali relativno frekvenco pojava (glej tabelo).
Teoretična verjetnost za pojav števila 1 na pošteni igralni kocki je $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$. Po 100.000 metih kocke eksperimentalna verjetnost ne odstopa tako zelo od dejanske vrednosti.
Kljub temu, da nismo opazovali povprečja metov, lahko sklepamo, da je za to zaslužen zakon velikih števil. ZAKAJ?

1.2 Zakon velikih števil

Šibki zakon velikih števil

Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih naključnih spremenljivk, za katere velja $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = \mu \in \mathbb{R}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo naključno spremenljivko

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

ki jo imenujemo vzorčno povprečje. Potem za vsak $\epsilon > 0$ velja

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| > \epsilon\right) = 0.$$

1.2 Zakon velikih števil

Krepki zakon velikih števil

Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih naključnih spremenljivk, za katere velja $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = \mu \in \mathbb{R}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ ponovno definiramo naključno spremenljivko

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Potem velja

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1.$$

1.3 Verjetnostni račun

- Izračun verjetnosti pojava naključnih dogodkov v zavarovalništvu je osnova za izračun premij za posamezno zavarovanje.
- Pri tem sta pomembni <u>klasična</u> in <u>statistična</u> definicija verjetnosti.

1.3 Verjetnostni račun

Klasična definicija verjetnosti

Naj bo $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ množica elementarnih in enakoverjetnih dogodkov v danem poskusu. Potem lahko poljuben dogodek A v tem poskusu izrazimo s temi dogodki. Brez izgube za splošnost naj bo

$$A = E_1 + \cdots + E_m, \quad m \leq n.$$

Verjetnost dogodka A definiramo na naslednji način:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Če je $m = 0$, je A nemogoč dogodek, $A = N$, če pa je $m = n$, pa je A gotov dogodek, $A = G$. V splošnem velja $P(A) \in [0, 1]$.

1.3 Verjetnostni račun

Statistična definicija verjetnosti

Za izračun te verjetnosti izvedemo eksperiment. Pri tem število pojavov nekega dogodka A v n ponovitvah poskusa imenujemo frekvenca dogodka A. Denimo, da frekvenco dogodka A označimo z M. Število

$$W(A) = \frac{M}{n}$$

imenujemo relativna frekvenca dogodka A.
Če so izpolnjeni vsi pogoje zakona velikih števil, pričakujemo, da bo za velike vrednosti n veljalo $W(A) \approx P(A)$.
OPOMBA: ob ustreznih predpostavkah je statistična verjetnost lahko dober približek za teoretično verjetnost!!!

1.4 Diskretne naključne spremenljivke

- Naključna spremenljivka X je preslikava, ki slika iz prostora elementarnih dogodkov G v $\mathbb{R}$, katere vrednost je odvisna od naključja.

Definicija (formalno)

Naj bo $(G, \mathcal{A}, P)$ verjetnostni prostor. Preslikavo $X : G \to \mathbb{R}$ imenujemo naključna spremenljivka, če za vsako Borelovo množico $B \in \mathcal{B}$ velja, da je $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

1.4 Diskretne naključne spremenljivke

Definicija

Naj bo $X : G \to \mathbb{R}$ naključna spremenljivka. Funkcijo $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, ki je definirana s predpisom

$$F_X(x) = P[X < x] = P[X \in (-\infty, x)],$$

imenujemo porazdelitvena funkcija naključne spremenljivke X.

Definicija

Naključna spremenljivka X je diskretna, če je njena zaloga vrednosti števna množica. Zalogo vrednosti naključne spremenljivke v tem primeru označimo z $Z_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

1.4 Diskretne naključne spremenljivke

Definicija

Naj bo $Z_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ zaloga vrednosti diskretne naključne spremenljivke. Verjetnostno funkcijo naključne spremenljivke za vsak $i \in \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ definiramo kot

$$p_i = P[X = x_i].$$

Verjetnostno funkcijo lahko predstavimo tudi z dvovrstičnim simbolom.

Opomba: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

1.4 Diskretne naključne spremenljivke

- Porazdelitvena funkcija diskretne naključne spremenljivke X je podana s predpisom
$$F_X(x) = P[X < x] = \sum_{x_i < x \,\wedge\, i \geq 1} p_i .$$

- Graf porazdelitvene funkcije diskretne naključne spremenljivke je stopničasta funkcija, ki ima v točki x_i "skok" za vrednost p_i (glej skico).

1.4 Diskretne naključne spremenljivke

Definicija

Naj bo X diskretna naključna spremenljivka z zalogo vrednosti $Z_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ in $p_i = P(X = x_i)$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Če obstaja $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$, potem definiramo vrednost

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

ki jo imenujemo matematično upanje naključne spremenljivke X, predstavlja pa pričakovano vrednost, ki jo bo zavzela naključna spremenljivka X.

1.4 Diskretne naključne spremenljivke

Primeri diskretnih naključnih spremenljivk

- Indikator I_A,
- Enakomerna porazdelitev $E(n)$,
- Binomska porazdelitev $b(n, p)$,
- Geometrijska porazdelitev $G(p)$.

1.5 Tablice smrtnosti

- S pomočjo verjetnosti lahko konstruiramo tablice smrtnosti, ki so osnova za izračun (neto) premij pri danem zavarovanju.
- Osnovna podatka na tablicah smrtnosti sta število živih in število mrtvih oseb v določenem obdobju.
- S pomočjo obeh podatkov lahko izračunamo verjetnosti preživetja in smrti osebe v tem istem obdobju.

1.5 Tablice smrtnosti

- Zakon velikih števil nam, v primeru ustrezno izbranega vzorca ljudi, zagotavlja, da sta praktično izračunani verjetnosti preživetja in smrti relativno blizu teoretično pričakovanim verjetnostim za preživetje in smrt.
- Vsi omenjeni podatki v tablici smrtnosti, skupaj z obrestno mero, omogočajo izračun t.i. komutacijskih števil, ki se uporabljajo za neposreden izračun (neto) premij za življenjska zavarovanja in življenjske rente.
- Tablice smrtnosti lahko konstruiramo z neposredno metodo, ali s posredno metodo.

1.5 Tablice smrtnosti

NEPOSREDNA METODA

- Neposredna metoda spremlja določeno število novorojenčkov od njihovega rojstva do njihove smrti. Na tak način dobimo verjetnosti za preživetje in smrt v prvem letu, v drugem letu, v tretjem letu, itd.
- Neposredna metoda je zamudna, zato praviloma raje uporabljamo posredno metodo.
- Zaradi zamudnosti te metode so v preteklosti te podatke pridobivali predvsem iz raznih cerkvenih zapisov o rojstvu in smrti oseb.

1.5 Tablice smrtnosti

POSREDNA METODA

- Posredna metoda spremlja število živih in mrtvih oseb v krajšem obdobju (običajno eno leto) za več različnih generacij.
- Dobljeni podatki se nato uporabijo za namišljeno skupino za celo življenjsko dobo (glej primer).
- Pridobljene verjetnosti preživetja in smrti, ki smo jih izračunali za različne generacije, uporabimo kot model za namišljeno skupino, da dobimo podatke o številu živih in mrtvih oseb te skupine skozi celo življenjsko obdobje.

1.6 Verjetnosti preživetja in smrti

- ℓ_x je število živih oseb starih x let.
- d_x je število oseb starih x let, ki so umrli v enem letu.
- p_x je verjetnost, da bo oseba stara x let preživela eno leto.
- ${}_k p_x$ je verjetnost, da bo oseba stara x let preživela k let, $k \in \mathbb{N}_0$.
- q_x je verjetnost, da bo oseba stara x let umrla v enem letu.
- ${}_k q_x$ je verjetnost, da oseba stara x let ne bo preživela k let, $k \in \mathbb{N}_0$.
- Dogovor: ${}_0 p_x = 1$, ${}_1 p_x = p_x$, ${}_0 q_x = 0$, ${}_1 q_x = q_x$.
- Vedno velja ${}_k p_x + {}_k q_x = 1$ za vsak $k \in \mathbb{N}_0$.

1.6 Verjetnosti preživetja in smrti

- Denimo, da imamo množico ljudi. V tej množici ljudi z G_x označimo število oseb starih x let. Pričakovano število oseb iz te množice, ki bodo še živi čez $k \in \mathbb{N}_0$ let, označimo z $G_{x:k}$ in izračunamo po formuli

$$G_{x:k} = G_x \cdot {}_k p_x,$$

kjer smo verjetnost ${}_k p_x$ pridobili iz tablic smrtnosti na podlagi neke druge vzorčne skupine oseb (glej primer).
Opomba: če $G_{x:k}$ računamo na vzorcu ljudi, iz katerega smo pridobili verjetnost ${}_k p_x$, potem dobimo $G_{x:k} = \ell_{x+k}$.

1.6 Verjetnosti preživetja in smrti

- K_x je diskretna naključna spremenljivka, ki predstavlja število let, ki jih bo preživela oseba stara x let.
- Zaloga vrednosti naključne spremenljivke K_x je $Z_{K_x} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Za vsak $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ je $P[K_x = k] =_k p_x \cdot q_{x+k}$ verjetnostna funkcija naključne spremenljivke K_x. (zapiši dvovrstični simbol)
- Pričakovana življenjska doba oseba stare x let je $e_x = E[K_x]$. S pomočjo tablic smrtnosti lahko izpeljemo

$$e_x = \frac{\ell_{x+1} + \ell_{x+2} + \ell_{x+3} + \cdots}{\ell_x}.$$

1.7 Komutacijska števila

- ℓ_{x+k} je število živih oseb starih $x+k$ let, $k \in \mathbb{N}_0$.
- d_{x+k} je število oseb starih $x+k$ let, $k \in \mathbb{N}_0$, ki so umrli v enem letu.
- Za vsak $k \in \mathbb{N}_0$ velja zveza $d_{x+k} = \ell_{x+k} - \ell_{x+k+1}$.
- Če vrednosti za število živih in mrtvih oseb združimo z obrestno mero, dobimo t.i. komutacijska števila, ki jih delimo na komutacijska števila za žive in komutacijska števila za mrtve.
- Naj bo i efektivna letna obrestna mera. Letni diskontni faktor definiramo kot $v = \frac{1}{1+i}$ (glej sliko).

1.7 Komutacijska števila

KOMUTACIJSKA ŠTEVILA ZA ŽIVE

- Diskontirano število živih oseb starih x let je $D_x = \ell_x \cdot v^x$ (glej primer).
- Vsota diskontiranih živih oseb starih x let je

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}.$$

- Vsota vsot diskontiranih živih oseb starih x let je

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}.$$

1.7 Komutacijska števila

KOMUTACIJSKA ŠTEVILA ZA MRTVE

- Diskontirano število mrtvih oseb starih x let je $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$ (glej primer).
- Vsota diskontiranih mrtvih oseb starih x let je

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}.$$

- Vsota vsot diskontiranih mrtvih oseb starih x let je

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}.$$

1.7 Komutacijska števila

NEKATERE ZVEZE MED KOMUTACIJSKIMI ŠTEVILI

- $C_x = D_x \cdot v - D_{x+1}$.
- $M_x = N_x \cdot v - N_{x+1}$.
- $R_x = S_x \cdot v - S_{x+1}$.
- $M_x = D_x - N_x \cdot d$; $d = \frac{i}{1+i}$.
- $\ldots$

2.1 Obrestne mere

- i je efektivna letna obrestna mera (npr. $i = 0,04$ ali $i = 4\%$).
- $i^{(m)}$ je nominalna obrestna mera z obrestovanjem m-krat letno (npr. $m = 2, 3, 4, 12$). Obrestna mera $i^{(m)}$ je za vsak m manjša od obrestne mere i (glej primer).
- $i^{(m)} = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right), \ m = 2, 3, 4, 12.$
- Naj bo i efektivna letna obrestna mera. Letni diskontni faktor je $v = \frac{1}{1+i}$ in ga imenujemo tudi neto sedanja vrednost od 1, ali vrednost števila 1 danes (ta trenutek), pri pogoj, da bo vrednost 1 izplačana čez eno leto (upoštevajoč efektivno obrestno mero i).
- V splošnem je $K \cdot v^x$, $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, neto sedanja vrednost kapitala K, ki bo (iz)plačan čez x let.

2.1 Obrestne mere

- d je letna diskontna obrestna mera, tj. $d = \frac{i}{1+i}$. Obrestna mera d je diskontirana efektivna obrestna mera i.
- Zveza med i, d in v je $1 - d = v = \frac{1}{1+i}$ oz. $1 + i = v^{-1} = (1-d)^{-1}$.
- $d^{(m)}$ je nominalna diskontna obrestna mera z obrestovanjem m-krat letno (npr. $m = 2, 3, 4, 12$). Obrestna mera $d^{(m)}$ je za vsak m večja od obrestne mere d.
- $d^{(m)} = m\left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right)$, $m = 2, 3, 4, 12$.
- V primeru zveznega obrestovanja izračunamo limito

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\lim\limits_{m\to\infty} i^{(m)}} = e^{\delta},$$

kjer je δ jakost obresti.

2.1 Obrestne mere

- Zvezo med i, d in δ poiščemo iz enakosti

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{\delta}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}=(1-d)^{-1}.$$

- Odnos med vsemi obrestnimi merami je

$$i>i^{(2)}>i^{(3)}>\cdots>\delta>\cdots>d^{(3)}>d^{(2)}>d.$$

2.2 Aktuarska sedanja vrednost

- Naj bo t čas zavarovanega dogodka Z, pri čemer se ob pojavu tega dogodka izplača zavarovalna vsota $ZV = 1$ (v enem znesku). Dodatno predpostavimo, da do izplačila pride ob koncu leta, v katerem se je dogodek zgodil. ZAKAJ DODATNA PREDPOSTAVKA?
- Koliko je bilo treba plačati za to zavarovanje ob času sklenitve zavarovanja (npr. danes), tj. v času $t_0 = 0$, če pri temi niso nastali dodatni stroški in upoštevamo princip ekvivalence (vrednost vplačila je enaka vrednosti izplačila)? (glej sliko)
- Odgovor: za to zavarovanje smo plačali

$$NSV = 1 \cdot v^{[t+1]} = ZV \cdot v^{[t+1]}.$$

Vemo že, da vrednost NSV imenujemo neto sedanja vrednost od zavarovalne vsote ZV.

2.2 Aktuarska sedanja vrednost

- Ker je zavarovani dogodek praviloma odvisen od naključja, ne vemo, kdaj se bo zgodil. Zato lahko na zavarovani dogodek Z gledamo kot na (diskretno) naključno spremenljivko. (glej zaporedje slik)
- Zaloga vrednosti naključne spremenljivke Z naj bodo različne neto sedanje vrednosti morebitnih bodočih izplačil zavarovalne vsote $ZV = 1$, tj. $\{NSV_1, NSV_2, NSV_3, \ldots\}$. Denimo, da se za vsak $k \in \mathbb{N}$ neto sedanja vrednost NSV_k zgodi z verjetnostjo p_k. (zapiši dvovrstično tabelo)

2.2 Aktuarska sedanja vrednost

- Matematično upanje naključne spremenljivke Z je
$$\begin{aligned} A = E[Z] &= NSV_1 \cdot p_1 + NSV_2 \cdot p_2 + NSV_3 \cdot p_3 + \cdots \\ &= ZV(vp_1 + v^2 p_2 + v^3 p_3 + \cdots). \end{aligned}$$
- Število A imenujemo AKTUARSKA SEDANJA VREDNOST in služi kot osnovni model za izračun neto premij za različna zavarovanja.
- Pri uporabi zgornjega modela lahko brez izgube za splošnost vedno predpostavimo, da je zavarovalna vsota enaka $ZV = 1$. Če izračunamo aktuarsko sedanjo vrednosti A pri zavarovalni vsoti 1, je aktuarska sedanja vrednost za poljubno zavarovalno vsoto ZV enaka $ZV \cdot A$.

2.3 Življenjska zavarovanja

DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI

Oseba stara x let se doživljenjsko zavaruje za primer smrti, pri tem pa zavarovalnica ob koncu leta smrti te osebe izplača zavarovalno vsoto $ZV = 1$. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to zavarovanje v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Z in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti tega zavarovanja označimo z A_x in je enaka

$$A_x = E[Z] = \frac{M_x}{D_x}.$$

2.3 Življenjska zavarovanja

n LET TRAJAJOČE ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI

Oseba stara x let se za n let, $n \in \mathbb{N}$, zavaruje za primer smrti, pri tem pa zavarovalnica ob koncu leta smrti te osebe izplača zavarovalno vsoto $ZV = 1$, če umre v prvih n letih po sklenitvi zavarovanja. Sicer do izplačila ne pride. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to zavarovanje v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Z in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti tega zavarovanja označimo z $A^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

2.3 Življenjska zavarovanja

ZAVAROVANJE ZA DOŽIVETJE n LET

Oseba stara x let se zavaruje za doživetje naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$. Če zavarovana oseba preživi n let po sklenitvi zavarovanja, mu zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto $ZV = 1$, če pa umre prej kot v n letih, do izplačila ne pride. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to zavarovanje v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Z in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti tega zavarovanja označimo z $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ in je enaka

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E[Z] = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

2.3 Življenjska zavarovanja

ZAVAROVANJE ZA DOŽIVETJE n LET

- Ulomek $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ pogosto označimo tudi z oznako ${}_nE_x$ in predstavlja verjetnostni diskontni faktor oz. indikator diskontiranja. (izpeljava z naključno spremenljivko I_A)

- Aktuarska sedanja vrednost zavarovanja za doživetje n let je enaka verjetnostnemu diskontnemu faktorju:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x.$$

To zavarovanje lahko uporabimo za diskontiranje aktuarske sedanje vrednosti poljubnega drugega zavarovanja iz časa $t_1 > 0$ (čas v prihodnosti) v čas $t_0 = 0$ (danes).

2.3 Življenjska zavarovanja

MEŠANO ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA n LET

Oseba stara x let se hkrati zavaruje za n let za primer smrti in za doživetje naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$. Če zavarovana oseba umre v prvih n letih po sklenitvi zavarovanja, zavarovalnica ob koncu leta smrti te osebe izplača zavarovalno vsoto $ZV_1 = 1$, če pa ta oseba preživi n let po sklenitvi zavarovanja, mu zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto $ZV_2 = 1$. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to zavarovanje v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Z in izračunaj njeno matematično upanje)

2.3 Življenjska zavarovanja

MEŠANO ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA n LET

Aktuarsko sedanjo vrednosti tega zavarovanja označimo z $A_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$A_{x:\overline{n}|} = E[Z] = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

Opomba: če zavarovalni vsoti za obe (pod)zavarovanji nista enaki, $ZV_1 \neq ZV_2$, potem je izračun aktuarske sedanje vrednosti za mešano zavarovanje treba ločiti posebej na zavarovanje za primer smrti in zavarovanje za doživetje!

2.3 Življenjska zavarovanja

n LET ODLOŽENA ZAVAROVANJA

Oseba stara x let se doživljenjsko zavaruje za primer smrti, zavarovanje pa prične veljati n let po sklenitvi zavarovanja, $n \in \mathbb{N}$. V času veljavnosti zavarovanja zavarovalnica ob koncu leta smrti te osebe izplača zavarovalno vsoto $ZV = 1$. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to zavarovanje v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Z in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti tega zavarovanja označimo z ${}_{n|}A_x$ in je enaka

$${}_{n|}A_x = E[Z] = \frac{M_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x \cdot A_{x+n}.$$

2.3 Življenjska zavarovanja

n LET ODLOŽENA ZAVAROVANJA

- Podobno lahko izpeljemo tudi n let odloženo zavarovanje za primer smrti, ki je veljavno nadaljnjih m let, $n, m \in \mathbb{N}$. Zavarovalnica v tem primeru ob koncu leta smrti izplača zavarovalno vsoto $ZV = 1$, če oseba umre n let po sklenitvi zavarovanja in v manj kot $n + m$ letih po sklenitvi zavarovanja.

- Aktuarsko sedanjo vrednosti takšnega zavarovanja označimo z ${}_{n|m}A_x$ in je enaka

$$
{}_{n|m}A_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}.
$$

2.3 Življenjska zavarovanja

ENAKOMERNO NARAŠČAJOČE ZAVAROVALNE VSOTE

Oseba stara x let se doživljenjsko zavaruje za primer smrti. Če zavarovana oseba umre v k-tem letu, $k \in \mathbb{N}$, po sklenitvi zavarovanja, zavarovalnica ob koncu leta smrti izplača zavarovalno vsoto $ZV = k$. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to zavarovanje v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Z in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti tega zavarovanja označimo z $(IA)_x$ in je enaka

$$(IA)_x = E[Z] = \frac{R_x}{D_x}.$$

2.3 Življenjska zavarovanja

ENAKOMERNO NARAŠČAJOČE ZAVAROVALNE VSOTE

- Podobno lahko izpeljemo zavarovanje z enakomerno naraščajočimi zavarovalnimi vsotami za obdobje n let, $n \in \mathbb{N}$. Če zavarovana oseba umre v k-tem letu po sklenitvi zavarovanja, $k \leq n$, zavarovalnica ob koncu leta smrti izplača zavarovalno vsoto $ZV = k$.

- Aktuarsko sedanjo vrednosti takšnega zavarovanja označimo z $(IA)^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}.$$

2.3 Življenjska zavarovanja

ENAKOMERNO NARAŠČAJOČE ZAVAROVALNE VSOTE

- Definiramo lahko tudi zavarovanja z enakomerno padajočimi zavarovalnimi vsotami. Ker pri takšnih zavarovanjih zavarovalna vsota pada enakomerno, jih lahko definiramo samo za neko končno obdobje, npr. n let, $n \in \mathbb{N}$. Če je oseba umrla v k-tem letu po sklenitvi zavarovanja, $k \leq n$, zavarovalnica ob koncu leta smrti izplača zavarovalno vsoto $ZV = n - k + 1$.
- Aktuarsko sedanjo vrednosti takšnega zavarovanja označimo z $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$. (D.N.: izrazi s komutacijskimi števili)

2.3 Življenjska zavarovanja

ZAVAROVANJA Z IZPLAČILOM OB KONCU m-TEGA DELA LETA

- Naj A (z vsemi ustreznimi indeksi) označuje aktuarsko sedanjo vrednost poljubnega zavarovanja. Potem aktuarsko sedanjo vrednost tega istega zavarovanja, z izplačilom ob koncu m-tega dela leta (npr. $m = 2, 3, 4, 12$), označimo z $A^{(m)}$ (z vsemi ustreznimi indeksi).
- Zadošča dokazati zvezo med $A^{1}_{x:\overline{1}|}$ in $A^{(m)1}_{x:\overline{1}|}$. Dodatno predpostavimo, da je verjetnost, da oseba stara x let umre v prvem letu, q_x, enakomerno porazdeljena. Preostale aktuarske sedanje vrednosti za zavarovanja z izplačilom ob koncu m-tega dela leta lahko nato izpeljemo s pomočjo matematične indukcije. (glej dokaz)

2. MODELI ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJ

2.3 Življenjska zavarovanja

ZAVAROVANJA Z IZPLAČILOM OB KONCU m-TEGA DELA LETA

- $A^{(m)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{i}{i^{(m)}}$,
- $A^{(m)}_{x} = A_{x} \cdot \frac{i}{i^{(m)}}$,
- $A^{(m)}{}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ (edina izjema!!!),
- $A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{i}{i^{(m)}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$,
- ${}_{n|}A^{(m)}_{x} = {}_{n|}A_{x} \cdot \frac{i}{i^{(m)}}$,
- $(IA)^{(m)}_{x} = (IA)_{x} \cdot \frac{i}{i^{(m)}}$,
- $\ldots$

2.4 Življenjske rente

- Pri konstrukciji modelov za življenjske rente si pomagamo z običajnimi (bančnimi) rentami, ki niso odvisna od življenja. Renta je večkratno izplačilo (vplačilo) nekega zneska. Ločimo med <u>prenumerandno</u> in <u>postnumerandno</u> rento.
- Neto sedanjo vrednost prenumerandne rente, ki se v vrednosti 1 izplačuje n let na začetku vsakega leta, $n \in \mathbb{N}$, označimo z $\ddot{a}_{\overline{n|}}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}. \ (\textit{glej sliko})$$

- Neto sedanjo vrednost postnumerandne rente, ki se v vrednosti 1 izplačuje n let na koncu vsakega leta, $n \in \mathbb{N}$, označimo z $a_{\overline{n|}}$:

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}. \ (\textit{glej sliko})$$

2.4 Življenjske rente

- Dogovor: $\ddot{a}_{\overline{0}|} = a_{\overline{0}|} = 0$ (opomba: sovpada s krajšo formulo).

Izrek (seštevanje po delih)

Naj bosta $(u_k)_{k\geq 0}$ in $(v_k)_{k\geq 0}$ realni zaporedji ter $b \geq a \geq 0$. Tedaj velja

$$\sum_{k=a}^{b} u_{k+1}(v_{k+1} - v_k) = (u_{b+1}v_{b+1} - u_a v_a) - \sum_{k=a}^{b}(u_{k+1} - u_k)v_k.$$

- Izrek velja tudi v primeru, ko je $b = \infty$ in vse vrste v izreku konvergirajo.

2.4 Življenjske rente

DOŽIVLJENJSKA RENTA

Oseba stara x let bo prejemala doživljenjsko rento z letnim izplačilom v vrednosti 1 (prenumerandno ali postnumerandno), a le do svoje smrti. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to življenjsko rento v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Y in izračunaj njeno matematično upanje).

Aktuarsko sedanjo vrednosti te prenumerandne življenjske rente označimo z $\ddot{a}_x$, postnumerandne življenjske rente pa z a_x:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \text{in} \qquad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

2.4 Življenjske rente

n LET TRAJAJOČA ŽIVLJENJSKA RENTA

Oseba stara x let bo n let prejemala življenjsko rento z letnim izplačilom v vrednosti 1 (prenumerandno ali postnumerandno), a največ do svoje smrti, če ta nastopi prej. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to življenjsko rento v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Y in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti te prenumerandne življenjske rente označimo z $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, postnumerandne življenjske rente pa z $a_{x:\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad \text{in} \qquad a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

2.4 Življenjske rente

n LET ODLOŽENE ŽIVLJENJSKE RENTE

Oseba stara x let bo čez n let pričela prejemati doživljenjsko rento z letnim izplačilom v vrednosti 1 (prenumerandno ali postnumerandno), a le do svoje smrti. Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to življenjsko rento v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Y in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti te prenumerandne življenjske rente označimo z ${}_{n|}\ddot{a}_x$, postnumerandne življenjske rente pa z ${}_{n|}a_x$:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad \text{in} \qquad {}_{n|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}. $$

2.4 Življenjske rente

n LET ODLOŽENE ŽIVLJENJSKE RENTE

- Podobno lahko izpeljemo tudi n let odloženo življenjsko rento, ki je veljavna nadaljnjih m let, $n, m \in \mathbb{N}$. Renta se prične izplačevati z letnim izplačilom v vrednosti 1 (prenumerandno ali postnumerandno) n let po sklenitvi zavarovanja in se izplačuje največ m let oz. do smrti osebe, če ta nastopi prej.

- Aktuarsko sedanjo vrednosti te prenumerandne življenjske rente označimo z ${}_{n|m}\ddot{a}_x$, postnumerandne življenjske rente pa z ${}_{n|m}a_x$:

$$ {}_{n|m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x} \qquad \text{in} \qquad {}_{n|m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}. $$

2.4 Življenjske rente

n LET SIGURNA ŽIVLJENJSKA RENTA

Oseba stara x let bo prejemala doživljenjsko rento z letnim izplačilom v vrednosti 1 (prenumerandno ali postnumerandno), a le do svoje smrti, če ta nastopi po n letih od sklenitve zavarovanja. Zavarovalnica namreč zagotavlja izplačevanje rente vsaj n let (neodvisno od smrti osebe). Enkratno neto premijo, ki jo moramo plačati za to življenjsko rento v času $t_0 = 0$ (danes), dobimo na naslednji način. (nariši številsko premico, zapiši naključno spremenljivko Y in izračunaj njeno matematično upanje)

Aktuarsko sedanjo vrednosti te prenumerandne življenjske rente označimo z $\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$, postnumerandne življenjske rente pa z $a_{\overline{x:\overline{n}|}}$:

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \frac{1-v^n}{d} + \frac{N_{x+n}}{D_x} \quad \text{in} \quad a_{\overline{x:\overline{n}|}} = \frac{1-v^n}{i} + \frac{N_{x+n+1}}{D_x}.$$

2.4 Življenjske rente

ŽIVLJENJSKE RENTE Z IZPLAČILI *m*-KRAT LETNO

- Naj $\ddot{a}$ oziroma a (z vsemi ustreznimi indeksi) označujeta aktuarski sedanji vrednosti poljubne prenumerande oziroma postnumerande življenjske rente. Potem aktuarski sedanji vrednosti teh istih življenjskih rent, z izplačili m-krat letno (npr. $m = 2, 3, 4, 12$), označimo z $\ddot{a}^{(m)}$ oziroma $a^{(m)}$ (z vsemi ustreznimi indeksi).

- Aktuarske sedanje vrednosti $\ddot{a}^{(m)}$ in $a^{(m)}$ (z vsemi ustreznimi indeksi) različnih življenjskih rent izpeljemo tako, da povežemo naključne spremenljivke življenjskih zavarovanj z naključnimi spremenljivkami življenjskih rent. Pri tem moramo paziti, da povežemo takšni naključni spremenljivki, ki imata enaki (oz. vsaj podobni) zalogi vrednosti.

2.4 Življenjske rente

ŽIVLJENJSKE RENTE Z IZPLAČILI m-KRAT LETNO

- Primer naključnih spremenljivk s podobnima zalogama vrednosti sta npr. naključna spremenljivka, ki predstavlja doživljenjsko zavarovanje in naključna spremenljivka, ki predstavlja doživljenjsko (prenumerandno oz. postnumerandno) rento. (glej dokaz zveze)
- V primeru doživljenjskih modelov dobimo naslednji zvezi:

$$A_x + d \cdot \ddot{a}_x = 1 \qquad \text{in} \qquad (1+i) \cdot A_x + i \cdot a_x = 1.$$

2.4 Življenjske rente

ŽIVLJENJSKE RENTE Z IZPLAČILI m-KRAT LETNO

- $A_{x:\overline{n|}} + d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1,$
- $(1+i) \cdot A_{x:\overline{n|}} + i \cdot a_{x:\overline{n|}} = 1,$
- ${}_{n|}A_x + d \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x = 1,$
- $(1+i) \cdot {}_{n|}A_x + i \cdot {}_{n|}a_x = 1,$
- $A_x^{(m)} + d^{(m)} \cdot \ddot{a}_x^{(m)} = 1,$
- $\left(1+i^{(m)}\right) \cdot A_x^{(m)} + i^{(m)} \cdot a_x^{(m)} = 1,$
- $\ldots$

2.4 Življenjske rente

ŽIVLJENJSKE RENTE Z IZPLAČILI *m*-KRAT LETNO

S pomočjo formul, ki povezujejo aktuarske sedanje vrednosti življenjskih zavarovanj z aktuarskimi sedanjimi vrednostmi življenjskih rent, lahko izpeljemo formule za aktuarske sedanje vrednosti življenjskih rent z izplačili m-krat letno, v odvisnosti od aktuarskih sedanjih vrednosti življenjskih rent z izplačili 1-krat letno:

- $\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) \cdot \ddot{a}_x - \beta(m)$, $\alpha(m) = \frac{i \cdot d}{i^{(m)} \cdot d^{(m)}}$, $\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} \cdot d^{(m)}}$,
- $a_x^{(m)} = \alpha(m) \cdot a_x - \beta'(m)$, $\beta'(m) = \frac{d - d^{(m)}}{i^{(m)} \cdot d^{(m)}}$,
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$,
- $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m) \cdot a_{x:\overline{n}|} - \beta'(m)(1 - {}_nE_x)$,
- ...

2.5 Večkratne neto premije

- Modeli življenjskih zavarovanj in življenjskih rent, ki so bili izpeljani v poglavjih 2.3 in 2.4, ob sklenitvi zavarovanja predvidevajo plačilo enkratne neto premije.
- V tem poglavju bodo ti modeli nadgrajeni tako, da bodo omogočali plačevanje večkratnih neto premij za posamezno življenjsko zavarovanje oz. življenjsko rento.
- Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da se prva premija plača ob sklenitvi zavarovanja. To pomeni prenumerandno plačevanje neto premij.

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE

Oseba stara x let se doživljenjsko zavaruje z zavarovalno vsoto $ZV = 1$. Za to zavarovanje bo plačevala premije na začetku vsakega leta dokler ne umre. Vrednost posamezne premije dobimo na naslednji način. (glej skico)

Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo s P_x in je enaka:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}.$$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA n LET TRAJAJOČE ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI

Oseba stara x let se za n let, $n \in \mathbb{N}$, zavaruje za primer smrti z zavarovalno vsoto $ZV = 1$. Za to zavarovanje bo plačevala premije n let na začetku vsakega leta, oziroma največ do svoje smrti, če ta nastopi prej. Vrednost posamezne premije dobimo na naslednji način. (glej skico)

Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo s $P^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka:

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA ZAVAROVANJE ZA DOŽIVETJE n LET

Oseba stara x let se zavaruje za doživetje naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$, z zavarovalno vsoto $ZV = 1$. Za to zavarovanje bo plačevala premije n let na začetku vsakega leta, oziroma največ do svoje smrti, če ta nastopi prej. Vrednost posamezne premije dobimo na naslednji način. (glej skico)

Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo s $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ in je enaka:

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA MEŠANO ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA n LET

Oseba stara x let se hkrati zavaruje za n let za primer smrti in za doživetje naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$, z zavarovalnima vsotama $ZV_1 = 1$ (za primer smrti) in $ZV_2 = 1$ (za primer doživetja). Za to zavarovanje bo plačevala premije n let na začetku vsakega leta, oziroma največ do svoje smrti, če ta nastopi prej. Vrednost posamezne premije dobimo na naslednji način. (glej skico)

Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo s $P_{x:\overline{n}|}$ in je enaka:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA MEŠANO ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA n LET

Opomba: če zavarovalni vsoti za obe (pod)zavarovanji nista enaki, $ZV_1 \neq ZV_2$, potem je večkratne neto premije za mešano zavarovanje treba ločiti posebej na zavarovanje za primer smrti in zavarovanje za doživetje!

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA n LET ODLOŽENA ZAVAROVANJA

Oseba stara x let se doživljenjsko zavaruje za primer smrti, z zavarovalno vsoto $ZV = 1$, zavarovanje pa prične veljati n let po sklenitvi zavarovanja, $n \in \mathbb{N}$. Za to zavarovanje bo plačevala premije n let na začetku vsakega leta, oziroma največ do svoje smrti, če ta nastopi prej. Vrednost posamezne premije dobimo na naslednji način. (glej skico)

Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo z ${}_{n|}P_x$ in je enaka:

$${}_{n|}P_x = \frac{{}_{n|}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA n LET ODLOŽENA ZAVAROVANJA

- Podobno lahko izpeljemo formulo za izračun letne premije za n let odloženo zavarovanje za primer smrti, ki je veljavno nadaljnjih m let, $n, m \in \mathbb{N}$.
- Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo z ${}_{n|m}P_x$ in je enaka:

$$ {}_{n|m}P_x = \frac{{}_{n|m}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{N_x - N_{x+n}}. $$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE Z VPLAČILI, KI NISO VEZANA NA OBDOBJE ZAVAROVANJA

Oseba stara x let se doživljenjsko zavaruje za primer smrti z zavarovalno vsoto $ZV = 1$. Za to zavarovanje bo plačevala premije h let, $h \in \mathbb{N}$, na začetku vsakega leta, oziroma največ do svoje smrti, če ta nastopi prej. Vrednost posamezne premije dobimo na naslednji način. (glej skico)

Vrednost letne premije tega zavarovanja označimo s ${}_hP_x$ in je enaka:

$$ {}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}}. $$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE Z VPLAČILI, KI NISO VEZANA NA OBDOBJE ZAVAROVANJA

Večkratne premije s h vplačili, $h \in \mathbb{N}$, lahko kombiniramo tudi z drugimi zavarovanji:

- n let trajajoče zavarovanje za primer smrti:

$$ {}_hP^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}, \ h \leq n, $$

- Zavarovanje za doživetje n let:

$$ {}_hP_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}, \ h \leq n, $$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE Z VPLAČILI, KI NISO VEZANA NA OBDOBJE ZAVAROVANJA

- Mešano življenjsko zavarovanje za n let:

$$ {}_{h}P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}, \ h \leq n, $$

- n let odloženo življenjsko zavarovanje:

$$ {}_{n|h}P_x = \frac{{}_{n|}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}, \ h \leq n, $$

- ...

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA RENTE

Večkratne premije lahko kombiniramo tudi z nekaterimi rentami:

- n let odložena doživljenjska renta:

$$P = \frac{_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

- n let odložena doživljenjska renta in h vplačil:

$$P = \frac{_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+h}},\ h \leq n,$$

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE ZA RENTE

- n let odložena življenjska renta, ki je veljavna nadaljnjih m let:

$$P = \frac{{}_{n|m}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{N_x - N_{x+n}},$$

- n let odložena življenjska renta, ki je veljavna nadaljnjih m let, in h vplačil:

$$P = \frac{{}_{n|m}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{N_x - N_{x+h}}, \;\; h \leq n,$$

- ...

2.5 Večkratne neto premije

VEČKRATNE PREMIJE Z VPLAČILI m-KRAT LETNO

- Večkratno premijo P izračunamo po principu

$$P \cdot X = Y,$$

  kjer X predstavlja aktuarsko sedanjo vrednost rente, ki jo plačujemo zavarovalnici, Y pa predstavlja aktuarsko sedanjo vrednost poljubnega zavarovanja, ali poljubne življenjske rente.

- Če želimo premije plačevati m-krat letno, z ustreznim obrestovanjem m-krat letno, namesto X uporabimo rento z izplačilom m-krat letno, namesto P pa pišemo $m \cdot P$, da letno premijo razdelimo na m delov na leto. (glej primer)

2.6 Bruto premije

Neto premijam, ki jih plačujemo za neko življenjsko zavarovanje, ali življenjsko rento, v praksi dodamo še druge stroške. S tem si zavarovalnica zagotovi svoj obstoj. Ločimo med tremi vrstami stroškov:

- α-stroški: začetni stroški, sklenitveni oz. akvizicijski stroški,
- β-stroški: večkratni-inkaso stroški, stroški obdelave pri pobiranju večkratne premije,
- γ-stroški: upravni stroški, tekoči stroški za plače, takse.

2.6 Bruto premije

Neto premija skupaj z α-, β- in γ-stroški tvori t.i. bruto premijo, ki jo imenujemo tudi kosmata premija. Primer uporabe stroškov:

- $\alpha = 3,5\%$ od zavarovalne vsote (enkratno),
- $\beta = 3\%$ od vsake pobrane bruto premije,
- $\gamma = 0,45\%$ od zavarovalne vsote za vsako leto veljavnosti zavarovanja (od sklenitve naprej).

2.6 Bruto premije

PRIMER UPORABE STROŠKOV PRI ZAVAROVANJIH

(1) Denimo, da želimo plačati enkratno bruto premijo za mešano zavarovanje z izplačilom zavarovalne vsote $ZV = 1$ bodisi ob koncu leta smrti bodisi ob doživetju. Pazi! β-stroškov ni!

- Enkratno bruto premijo za to zavarovanje označimo enako, kot aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja, le da v predpotenco dodamo oznako b.
- V danem primeru je oznaka ${}^{b}A_{x:\overline{n}|}$. (zapiši rešitev)

2.6 Bruto premije

PRIMER UPORABE STROŠKOV PRI ZAVAROVANJIH

(2) Denimo, da želimo plačevati bruto premije na začetku vsakega leta za mešano zavarovanje z izplačilom zavarovalne vsote $ZV = 1$ bodisi ob koncu leta smrti bodisi ob doživetju. β-stroške sedaj upoštevamo!

- Vrednost letne bruto premijo za to zavarovanje označimo s π. (zapiši rešitev)

2.6 Bruto premije

PRIMER UPORABE STROŠKOV PRI RENTAH

(1) Denimo, da želimo plačati enkratno bruto premijo za n-let odloženo doživljenjsko rento z izplačilom v vrednosti 1 na začetku vsakega leta. Pazi! β-stroškov ni!

- Enkratno bruto premijo za to življenjsko rento označimo enako, kot aktuarsko sedanjo vrednost te življenjske rente, le da v predpotenco dodamo oznako b.
- V danem primeru sta oznaki ${}^{b}_{n|}\ddot{a}_x$ ali ${}^{b}_{n|}a_x$. (zapiši rešitev)

2.6 Bruto premije

PRIMER UPORABE STROŠKOV PRI RENTAH

(2) Denimo, da želimo plačevati bruto premije za *n*-let odloženo doživljenjsko rento z izplačilom v vrednosti 1 na začetku vsakega leta. β-stroške sedaj upoštevamo!

- Vrednost letne bruto premijo za to življenjsko rento označimo, kot pri zavarovanjih, s π. (zapiši rešitev)

2.7 Matematična rezerva življenjskih zavarovanj

- Predpostavimo, da za nek tip zavarovanja zavarovana oseba zavarovalnici plačuje večkratne (neto) premije.
- Če ob sklenitvi zavarovanja v času t_0 upoštevamo princip ekvivalence, je pričakovana sedanja vrednost (aktuarska sedanja vrednost) vseh vplačil oz. premij enaka pričakovani sedanji vrednosti (aktuarski sedanji vrednosti) vseh izplačil.
- Vendar pa ta ekvivalenca v splošnem več ne obstaja v času $t_1 > t_0$ po sklenitvi zavarovanja (v prihodnosti). Pri pogoju, da je zavarovana oseba preživela do časa t_1, se s tem spremeni verjetnost za smrt te osebe do konca veljavnosti zavarovanja, kar posledično pomeni, da bi morala zavarovalnica na novo izračunati višino (neto) premije.

2.7 Matematična rezerva življenjskih zavarovanj

- Če premija ves čas zavarovanja ostane enaka, kot je bila določena ob sklenitvi zavarovanja, v povprečju prične nastajati razlika med vplačanimi in izplačanimi sredstvi.

- Zato za vsak $k \in \mathbb{N}$ definiramo vrednost

  ${}_kV_x =$ [pričakovana vrednost izplačil(a) k let po sklenitvi zavarovanja osebe stare x let] $-$ [pričakovana vrednost vplačil k let po sklenitvi zavarovanja osebe stare x let].

2.7 Matematična rezerva življenjskih zavarovanj

- Zavarovalne police so praviloma narejene tako, da je vrednost ${}_kV_x$ nenegativna, da ima zavarovana oseba interes, da nadaljuje z zavarovanjem.
- To pomeni, da mora pričakovana vrednost prihodnjih izplačil presegati pričakovano vrednost prihodnjih vplačil.
- Za zavarovalnico to predstavlja potencialno izgubo na dolgi rok, zato mora "rezervirati" dodatna sredstva, da je vsak trenutek zmožna pokriti negativno razliko, ki lahko nastane.
- Ta sredstva so enaka vrednosti ${}_kV_x$ in jih imenujemo tudi matematična (neto) rezerva življenjskih zavarovanj.

2.7 Matematična rezerva življenjskih zavarovanj

Opomba 1: Računanje matematične (neto) rezerve nima pomena, če zavarovana oseba zavarovanje plača z enkratno (neto) premijo ob sklenitvi zavarovanja, saj se ves znesek, ki bi ga pričakovano morala ta oseba plačati za to zavarovanja, pobere že ob pričetku veljavnosti zavarovanja.

Opomba 2: Za poljuben tip zavarovanja (in osebo poljubne starosti x let) vedno velja

$${}_0V_x = 0,$$

če upoštevamo, da je večkratna premija bila določena po principu ekvivalence v času $t_0 = k = 0$.

2.7 Matematična rezerva življenjskih zavarovanj

PRIMER UPORABE MATEMATIČNE REZERVE

(1) Denimo, da ima oseba stara x let sklenjeno mešano zavarovanje za n let, $n \in \mathbb{N}$, za katerega bo neto premije P plačevala prvih n let oz. največ do svoje smrti, če ta nastopi prej.

- Matematično rezervo za to zavarovanje označimo s ${}_kV_{x:\overline{n}|}$
- Zapiši matematično rezervo za vsak $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

2.7 Matematična rezerva življenjskih zavarovanj

PRIMER UPORABE MATEMATIČNE REZERVE

(2) Denimo, da ima oseba stara x let sklenjeno doživljenjsko zavarovanje, za katerega bo neto premije P plačevala prvih n let, $n \in \mathbb{N}$, oz. največ do svoje smrti, če ta nastopi prej.

- Matematično rezervo za to zavarovanje označimo s ${}_kV_x$.
- Zapiši matematično rezervo za vsak $k \in \mathbb{N}$. Pazi! Obdobje plačevanja premij ne sovpada z obdobjem veljavnosti zavarovanja!