UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Niko Tratnik

Zbrano gradivo: temeljni pojmi analize in elementarne funkcije – izpitne naloge z namigi

Maribor, 2019

PREDGOVOR

V tem gradivu so zbrane izpitne in kolokvijske naloge, ki zajemajo snov elementarnih funkcij in temeljnih konceptov matematične analize, pripravljal pa sem jih v letih 2015–2019. Naloge so urejene sistematično po posameznih temah, pri nekaterih problemih, ki niso rutinski, so dodani namigi za reševanje. Gradivo je namenjeno predvsem študentom prvega letnika matematike za utrjevanje in nadgradnjo srednješolskega znanja ter za uvajanje v analizo. V prvem poglavju je podanih nekaj osnovnih definicij in pojmov. Pri izbiri nekaterih nalog sem si pomagal tudi z obstoječimi učbeniki, zbirkami vaj in internetnimi viri.

Kazalo

Poglavje 1

Uvodni pojmi

V tem poglavju bomo podali definicije nekaterih osnovnih pojmov o realnih številih in funkcijah. Več teorije lahko najdemo na primer v literaturi [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15].

Številske množice
Množico vseh naravnih števil označimo z $\mathbb{N}$, množico vseh celih števil z $\mathbb{Z}$ in množico vseh realnih števil z $\mathbb{R}$. Realno število a je *racionalno*, če ga lahko zapišemo v obliki ulomka, torej če velja $a = \frac{m}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{Z}$. Oznaka za množico vseh racionalnih števil je $\mathbb{Q}$. Realna števila, ki niso racionalna, so *iracionalna.* Primeri iracionalnih števil so na primer števila $\sqrt{2}, \pi, e$.

Supremum in infimum podmnožic realnih števil (iz vira [4])
Naj bo A neka neprazna podmnožica realnih števil. Rečemo, da je A *navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da velja $a \leq M$ za vsak $a \in A$. Vsako tako število M imenujemo *zgornja meja* množice A. Podobno je A *navzdol omejena*, če obstaja tako realno število m, da velja $a \geq m$ za vsak $a \in A$. Vsako tako število m imenujemo *spodnja meja* množice A. Množica A je *omejena*, če je navzgor omejena in navzdol omejena.

Zlahka vidimo, da ima navzgor omejena množica neskončno mnogo zgornjih mej, podobno pa velja tudi za navzdol omejeno množico. Zato sta smiselni naslednji definiciji.

Realno število M je *supremum* množice A, če velja:

1. M je zgornja meja množice A,

2. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, tako da je $a > M - \varepsilon$.

V takem primeru pišemo $M = \sup A$, število M pa imenujemo tudi *najmanjša zgornja meja* ali *natančna zgornja meja.*

Realno število m je *infimum* množice A, če velja:

1. m je spodnja meja množice A,
2. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, tako da je $a < m + \varepsilon$.

V takem primeru pišemo $m = \inf A$, število m pa imenujemo tudi *največja spodnja meja* ali *natančna spodnja meja.*

Funkcije (iz vira [4])
Naj bosta A, B neprazni množici. *Funkcija* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko en element množice B. Če funkcija f elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, rečemo, da je b *slika* elementa a in pišemo $b = f(a)$. Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico B pa *kodomena.* *Zaloga vrednosti* funkcije f je definirana kot $Z_f = \{f(a) \mid a \in A\}$. Za poljubno množico $X \subseteq A$ je *slika* množice X definirana kot $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Za poljubno množico $Y \subseteq B$ je *praslika* množice Y definirana kot $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : C \to D$ takšni funkciji, da je $B \subseteq C$. Funkcija $g \circ f : A \to D$, ki je definirana s predpisom $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, se imenuje *kompozitum* funkcij f in g.

Funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za poljubna elementa $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če za poljuben element $b \in B$ obstaja $a \in A$, tako da velja $b = f(a)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Naj bo $f : A \to B$ bijektivna funkcija. Potem definiramo *inverzno funkcijo* $f^{-1} : B \to A$ na naslednji način: za poljuben $b \in B$ naj bo $a \in A$ tak, da je $f(a) = b$. Potem je $f^{-1}(b) = a$.

Realne funkcije realne spremenljivke
Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni podmnožici realnih števil. Potem pravimo, da je funkcija $f : A \to B$ *realna funkcija realne spremenljivke. Graf funkcije* f je množica $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$, ki je podmnožica ravnine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Naj bo $X \subseteq A$ poljubna neprazna množica. Pravimo, da funkcija f *narašča* na X, če za poljubna $x_1, x_2 \in X$ velja, da če je $x_1 \leq x_2$, potem je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Podobno funkcija f *pada* na X, če za poljubna $x_1, x_2 \in X$ velja, da če je $x_1 \leq x_2$, potem je $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Naj bo funkcija f definirana na nekem simetričnem intervalu, torej $A = [-a, a]$, kjer je $a > 0$, ali $A = \mathbb{R}$. Funkcija f je *soda*, če za vsak $x \in A$ velja $f(x) = f(-x)$. V tem primeru je graf funkcije simetričen glede na ordinatno os. Podobno je funkcija f *liha*, če za vsak $x \in A$ velja $f(-x) = -f(x)$. V tem primeru je graf funkcije simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Zveznost, limita in odvod

Naj bo f realna funkcija realne spremenljivke z definicijskim območjem $A \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je *zvezna v točki* $a \in A$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsak $x \in A$ velja: če je $|x - a| < \delta$, potem je $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Predpostavimo, da je množica $(a - c, a + c) \setminus \{a\}$, kjer je $c > 0$, vsebovana v definicijskem območju funkcije f. Potem pravimo, da je *limita funkcije* f*, ko gre* x *proti* a*, enaka* L (kar zapišemo kot $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$), če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsak $x \in (a - c, a + c) \setminus \{a\}$ velja: če je $|x - a| < \delta$, potem je $|f(x) - L| < \epsilon$. Opazimo, da je takšna funkcija f zvezna v točki a, če je definirana v točki a in je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Podobno definiramo tudi levo limito, desno limito, limito v neskončnosti, neskončno limito, kar najdemo na primer v viru [2].

Če obstaja limita $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, potem jo imenujemo *odvod funkcije* f *v točki* a in pišemo $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Za več informacij glej [5].

Pregled elementarnih funkcij

V tem razdelku bomo podali osnovne definicije nekaterih elementarnih funkcij. Več podrobnosti najdemo v [5].

Linearna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = kx + n$, kjer sta $k, n \in \mathbb{R}$. Za $k > 0$ je f naraščajoča, za $k < 0$ pa padajoča funkcija. Graf linearne funkcije je premica z enačbo $y = kx + n$. Naklonski kot φ premice lahko izračunamo po formuli $\tan \varphi = k$. Kot φ med premicama $y = k_1 x + n_1$ in $y = k_2 x + n_2$ izračunamo kot $\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$. Velja, da sta premici $y = k_1 x + n_1$ in $y = k_2 x + n_2$ vzporedni, če je $k_1 = k_2$, in pravokotni, če je $k_1 k_2 = -1$.

Poznamo tri oblike enačbe premice:

1. Eksplicitna oblika: $y = kx + n$.
2. Implicitna oblika: $ax + by + c = 0$, kjer je vektor $\overrightarrow{n} = (a, b)$ normalni vektor, pravokoten na dano premico.
3. Odsekovna oblika: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$; $m, n \neq 0$. Presečišči s koordinatnima osema sta točki $(m, 0)$ in $(0, n)$.

Kvadratna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$. Graf kvadratne funkcije je parabola.

Poznamo tri oblike zapisa kvadratne funkcije:

1. Eksplicitna (razvita) oblika: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Temenska oblika: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, kjer je $p = -\frac{b}{2a}$ in $q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ (p in q sta koordinati temena).
3. Ničelna oblika: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, kjer sta x_1 in x_2 ničli. Izračunamo ju lahko s pomočjo formule $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kjer je $D = b^2 - 4ac$. Za ničli veljata Viètovi formuli: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ in $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Potenčna funkcija z naravnim eksponentom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

Korenska funkcija: če je $n \geq 3$ liho število, potem je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, bijektivna funkcija, njena inverzna funkcija pa je korenska funkcija $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki jo označimo kot $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Če je n sodo število, potem je $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^n$, bijektivna funkcija, njena inverzna funkcija pa je korenska funkcija $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, ki jo označimo kot $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Polinom je funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kjer je $a_i \in \mathbb{R}$ za vsak $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Če je $a_n \neq 0$, ima polinom p stopnjo n.

Racionalna funkcija f je kvocient dveh polinomov p in q, torej $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Definirana je povsod, kjer je $q(x) \neq 0$. Če p in q nimata skupnih ničel, potem ima f ničle v točkah, kjer je $p(x) = 0$, in pole (navpične asimptote) v točkah, kjer je $q(x) = 0$.

Eksponentna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = a^x$, kjer je $a > 0$ in $a \neq 1$. Za $a > 1$ je f naraščajoča, za $a < 1$ pa padajoča funkcija. Zaloga vrednosti funkcije f je $Z_f = (0, \infty)$.

Logaritemska funkcija: funkcija $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$ in $a \neq 1$), je bijektivna funkcija, njena inverzna funkcija pa je logaritemska funkcija $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, ki jo označimo kot $f^{-1}(x) = \log_a x$ (število a imenujemo *osnova* logaritma). Velja torej, da je $\log_a x = y$ natanko tedaj, ko je $a^y = x$. Za $a > 1$ je f^{-1} naraščajoča, za $a < 1$ pa padajoča funkcija. V posebnem primeru, ko je $a = e$, uporabljamo oznako $\ln x$ namesto $\log_e x$.

Še nekaj pravil za računanje z logaritmi:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$,

2. $\log_a x^y = y \log_a x$, $x > 0, y \in \mathbb{R}$,

3. prehod na novo osnovo: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $x, b > 0$, $b \neq 1$.

Hiperbolični sinus in ***hiperbolični kosinus*** sta funkciji $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirani s predpisoma $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ in $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. ***Hiperbolični tangens*** in ***hiperbolični kotangens*** definiramo kot $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ in $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.

Kotne (trigonometrične) funkcije. Če točko $(1, 0)$ zavrtimo okoli koordinatnega izhodišča za nek kot t (ki ga merimo v radianih) in dobljeno točko označimo z (x, y), potem definiramo $\sin t = y$ in $\cos t = x$. Na ta način dobimo kotni funkciji ***sinus*** in ***kosinus***, tako da velja $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obe funkciji sta periodični s periodo 2π in obe imata zalogo vrednosti $[-1, 1]$. Pri tem je funkcija sinus liha funkcija, kosinus pa soda funkcija. Funkciji ***tangens***, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, in ***kotangens***, $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, definiramo s formulama $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Obe funkciji sta lihi in periodični s periodo π, prav tako imata obe zalogo vrednosti $\mathbb{R}$.

Tabela nekaterih osnovnih vrednosti:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
cot	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

V nadaljevanju podajamo nekaj formul (iz vira [4]), ki veljajo za vsa realna števila x, y, kjer so ustrezni izrazi definirani.

1. Osnovne zveze:

   (i) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

   (ii) $\tan x = \frac{1}{\cot x}$,

   (iii) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$,

   (iv) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Formule za komplementarne kote:

   (i) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,

   (ii) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot\ x$, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\ x$.

3. Adicijski izreki:

   (i) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,

   (ii) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,

   (iii) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$.

4. Formule za računanje dvojnih kotov:

   (i) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos y$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

   (ii) $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.

5. Formule za računanje polovičnih kotov:

   (i) $\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$,

   (ii) $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$,

   (iii) $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

6. Formule za pretvarjanje produkta v vsoto:

   (i) $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x + y) - \cos(x - y))$,

   (ii) $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$,

   (iii) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$.

7. Formule za pretvarjanje vsote/razlike v produkt:

(i) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

(ii) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,

(iii) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

(iv) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Krožne (ciklometrične) funkcije so inverzne funkcije od kotnih funkcij. Da jih lahko definiramo, najprej spremenimo definicijska območja in zaloge vrednosti ustreznih trigonometričnih funkcij, da le-te postanejo bijektivne: $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$. Krožne funkcije ***arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens*** in ***arkus kotangens*** tako slikajo na naslednji način:
$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
$\mathrm{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

Omenimo, da eksponentno funkcijo, logaritemsko funkcijo in trigonometrične funkcije imenujemo tudi *transcendentne funkcije*.

Stožnice (krivulje drugega reda)

Pod stožnice uvrščamo *krožnico* (njena enačba v osnovni legi je $x^2 + y^2 = r^2$, kjer je $r > 0$ polmer), *elipso* (njena enačba v osnovni legi je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kjer sta $a, b > 0$ njeni polosi), *hiperbolo* (njena enačba v osnovni legi je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, kjer sta $a, b > 0$ njeni polosi) in *parabolo* (njena enačba v osnovni legi je $y^2 = 2px$, kjer je $p \in \mathbb{R}$). Več informacij o stožnicah lahko najdemo v [5].

V naslednjih poglavjih so zbrane naloge, ki so se pojavljale na izpitih in kolokvijih pri predmetu Elementarne funkcije. Naloge so urejene v sklope po posameznih temah. Veliko dodatnih nalog lahko najdemo na primer v zbirkah za srednje šole [3, 5, 6, 7, 8], zbirkah za fakultete [4, 14, 16], zbirkah tekmovalnih nalog [1, 12, 13] in univerzitetnih učbenikih [9, 10, 15].

Poglavje 2

Številske množice in osnovno o funkcijah

1. Naj bosta p in q različni praštevili. Dokaži, da je število $\sqrt{pq}$ iracionalno.
2. Naj bosta p in q različni praštevili. Pokaži, da je število $\log_{\sqrt{p}} q$ iracionalno.
3. Naj bosta p in q različni praštevili ter $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dokaži, da je število $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ iracionalno.
4. Podana je množica $A = \{\frac{3n+1}{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Določi minimum, maksimum, infimum in supremum množice A (če obstajajo) in vse odgovore utemelji z dokazi!
5. Naj bo
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \in (0, 1]\}.$$
Določi supremum, infimum, maksimum in minimum množice A ali dokaži, da tako število ne obstaja. Odgovore utemelji!
6. Dani sta množici
$$A = \left\{\frac{3n-2}{5n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \{|x^2 - 4| - |x + 2| \,|\, x \in (0, 5)\}.$$
Določi infimum, supremum, minimum in maksimum (če obstajajo) množic A in B. Vse odgovore utemelji!
7. Za neprazni podmnožici A in B množice $\mathbb{R}$ definiramo $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

(a) Če je $A = (0,3)$ in $B = [2,7)$, določi množico $A + B$.

(b) Naj bosta A in B poljubni neprazni podmnožici množice $\mathbb{R}$, ki sta omejeni. Dokaži, da je tudi množica $A + B$ omejena.

8. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazna in omejena množica, tako da velja $\sup(A) = M$ in $\inf(A) = m$. Naj bo še $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija.

   (a) V primeru, ko je $f(x) = 3x + 1$, preveri, da je množica $f(A)$ omejena in da velja $\sup(f(A)) = f(M)$ in $\inf(f(A)) = f(m)$.

   (b) Poišči primer omejene množice A in funkcije f, tako da množica $f(A)$ ne bo omejena.

9. Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dane so množice $A = f\left([3, \infty)\right), \quad B = f^{-1}\left([-2, 4]\right) \;\text{ in }\; C = f\left(\left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right).$

   (a) Zapiši in skiciraj množici A in B v $\mathbb{R}$.

   (b) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic A, B in C. Odgovor za infimum množice C tudi dokaži.

10. Podana je preslikava

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$F : t \mapsto (2t + 1, t^2).$$

   (a) Ugotovi, ali je F injektivna oziroma surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.

   (b) Naj bo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 4\}$. Zapiši množico $F^{-1}(D)$ tako, da naštejeΕ‘ vse njene elemente.

11. Podana je preslikava

$$F : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$
$$F : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

   (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.

   (b) Zapiši in skiciraj množici $F^{-1}(\{4\})$ ter $F^{-1}([1, 9])$.

(c) Ali je funkcija F, zožena na množico $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \wedge y \geq 0\}$ injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.

12. Podana je preslikava

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$F : (a, b) \mapsto ab.$$

(a) Izračunaj ter zapiši množico $F(A)$, kjer je $A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, a = b + 1 \wedge a \leq 5\}$, in množico $F^{-1}(\{9, 10\})$.

(b) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.

(c) Funkcija $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ naj bo podana s predpisom $G(n) = (n + 1, n^2)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Določi domeno in kodomeno kompozituma $F \circ G$ ter izračunaj predpis funkcije $F \circ G$.

13. Podana je preslikava

$$F : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$
$$F : (x, y) \mapsto (x - y)^2.$$

(a) Ugotovi in utemelji, ali je F injektivna oz. ali je surjektivna.

(b) Zapiši in skiciraj množici $F^{-1}(\{4\})$ ter $F^{-1}([4, 9])$.

(c) Naj bo $G(x, y) = 5x^2 + 10y^2 - 8x + 36y - 2xy + 4$. V ravnini skiciraj množico vseh točk (x, y), za katere velja $F(x, y) = G(x, y)$.

14. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < -2 \\ -x^2 + 5, & -2 \leq x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}.$$

Zapiši predpis funkcije $f \circ g$, nariši njen graf in določi zalogo vrednosti te funkcije.

15. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1 \\ 3, & x \leq 1 \end{cases}.$$

   (a) Preveri, ali za funkcijo f obstaja inverzna funkcija. Če obstaja, zapiši njen predpis.

   (b) Zapiši predpis funkcije $f \circ g$ ter določi njeno zalogo vrednosti.

16. Funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imata predpisa

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 3x+1, & -1 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}.$$

   (a) Skiciraj graf funkcije f in ugotovi, ali obstaja inverzna funkcija funkcije f. Če inverzna funkcija obstaja, zapiši njen funkcijski predpis. Vse odgovore utemelji!

   (b) Zapiši predpis funkcije $f \circ g$.

17. Naj bosta $f : B \to C$ in $g : A \to B$ funkciji ter naj bo $f \circ g : A \to C$ njun kompozitum.

   (a) Dokaži: če je funkcija $f \circ g$ surjektivna, potem je f surjektivna.

   (b) Naj velja $A = B = C = \mathbb{R}$. Poišči taki funkciji f in g, da bo f surjektivna, $f \circ g$ pa ne.

Namigi za reševanje nekaterih nalog

10. Primer (a): funkcija je injektivna in ni surjektivna.

11. Primer (a): funkcija ni injektivna in je surjektivna.

12. Primer (b): funkcija ni injektivna in je surjektivna.

13. Primer (a): funkcija ni injektivna in je surjektivna.

Poglavje 3

Stožnice

1. Dane so točke $A(2,3)$, $B(5,0)$ in $C(3,2\sqrt{2})$. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica, ki poteka skozi točke A, B in C.

   (a) Zapiši enačbo krožnice $\mathcal{K}$.

   (b) Zapiši enačbo enakoosne hiperbole, ki ima gorišči v točkah B in $D(-1,0)$.

2. Množico
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x^2+6x| + y^2 - 8y = 0\}$$
zapiši brez znakov za absolutno vrednost in jo skiciraj v $\mathbb{R}^2$.

3. Dani sta množici v $\mathbb{R}^2$:
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = -\frac{x^2}{4} + x\} \text{ in } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x - 4y^2 = 0 \wedge y \geq 0\}.$$

   (a) Skiciraj množici v ravnini in zapiši množico $A \cap B$, tako da naštejeь vse njene elemente.

   (b) Utemelji, ali katera izmed množic A oz. B predstavlja graf kake realne funkcije realne spremenljivke? Če je odgovor da, zapiši domeno in funkcijski predpis te funkcije.

4. V $\mathbb{R}^2$ sta podani množici $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 9\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^2x^2 + 25y^2 \leq 25a^2\}$, kjer je $a \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Določi najmanjše možno število $a \in \mathbb{R}^+$ tako, da bo $A^C \subseteq B$. Nato za izbrani a skiciraj množico $A \setminus B$.

(b) Če je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, skiciraj množico $A \cap D$.

5. [10] Dana je elipsa E z enačbo $x^2 + 2y^2 = 18$.

   (a) Skiciraj elipso E ter zapiši vsa štiri temena in obe njeni gorišči. Zapiši še enačbo elipse E', ki jo dobimo tako, da elipso E vzporedno premaknemo za vektor $\overrightarrow{s} = (2, 3)$.

   (b) V elipso E je včrtan enakokraki trikotnik T, katerega dve oglišči ležita na premici z enačbo $y = -x + 3$. Izračunaj vsa tri oglišča trikotnika T.

Namigi za reševanje nekaterih nalog

1. Primer (a): z vstavljanjem točk reši sistem treh enačb s tremi neznankami. Druga možnost je, da najprej izračunaš središče krožnice, ki je presečišče simetral na dve tetivi.

2. Loči možnosti glede na vrednost spremenljivke x ($x \in (-6, 0)$ ali $x \notin (-6, 0)$).

5. Primer (b): najprej izračunaj presečišči premice in elipse. Nato upoštevaj tri možne rešitve (pomagaj si s skico).

Poglavje 4

Linearna, kvadratna in korenska funkcija

1. V ravnini skiciraj množico
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |3x - y + 5| < 2\}$$
in pri tem vse korake računsko utemelji.

2. Dana je družina linearnih funkcij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, podanih s predpisom
$$f_n(x) = (2 - n)x + 3 - n,$$
kjer je n naravno število.
   (a) Določi parameter n tako, da se bo funkcija $f_n(x)$ dotikala funkcije $g(x) = x^2$.
   (b) Dokaži, da imajo grafi vseh funkcij f_n skupno točko.

3. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = | - 2x^2 - 3x + 5|$.
   (a) Zapiši funkcijo f brez znakov za absolutno vrednost in skiciraj njen graf.
   (b) Reši neenačbo $f(x) < |x| + 3$.

4. V kvadratni enačbi $x^2 + ax + (a - 2) = 0$ določi a tako, da bo za rešitvi x_1 in x_2 izpolnjena enakost
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2.$$

5. [3] Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = x^2 + (m+n)x + m - n$, kjer sta m in n neki realni števili.

   (a) Za katere vrednosti parametrov m in n bo funkcija f negativna le na intervalu $(-4, 2)$?

   (b) Za $m = n = -1$ reši neenačbo $|f(x)| < |x| + |x - 2|$.

6. [3] Na daljici AB dolžine $a \in \mathbb{R}^+$ izberemo točko M, ki je x enot oddaljena od A. Nato konstruiramo enakokrak trikotnik T_1 z osnovnico AM ter višino $\frac{x}{3}$ in na isti strani daljice AB še enakokrak trikotnik T_2 z osnovnico MB in višino $\frac{a-x}{3}$. Naj bo D vrh trikotnika T_1 in C vrh trikotnika T_2.

   (a) Ploščino štirikotnika $ABCD$ izrazi kot funkcijo spremenljivke x.

   (b) Ugotovi, pri kateri vrednosti x ima štirikotnik $ABCD$ največjo ploščino in koliko je ta ploščina.

7. [3] Kvadratni funkciji f_1 in f_2 s predpisoma $f_1(x) = a_1x^2 + 2b_1x + c_1$ in $f_2(x) = a_2x^2 + 2b_2x + c_2$ sta negativni za vse $x \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je kvadratna funkcija $f(x) = a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2$ pozitivna za vse $x \in \mathbb{R}$.

8. Dana je družina parabol $y = x^2 + (m-2)x - m$, kjer je $m \in \mathbb{R}$.

   (a) Poišči točko, ki leži na vseh parabolah iz družine.

   (b) Določi in skiciraj krivuljo, ki gre skozi temena vseh parabol, ki jih dobiš, ko parameter m zavzame vse vrednosti iz $\mathbb{R}$.

9. V enačbi $x^2 + 9mx + (27m^2 - 1) = 0$ določi parameter m tako, da bo za rešitvi x_1, x_2 dane enačbe veljalo $x_1^3 + x_2^3 = 54$.

10. [13] Naj bosta a in b pozitivni realni števili. Dokaži, da je vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{8}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8} + \sqrt{ab}}}$$

    neodvisna od a in b.

11. Določi definicijsko območje funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \sqrt{|x^2 - 9| - 4x}$.

Namigi za reševanje nekaterih nalog

1. Loči dve možnosti pri absolutni vrednosti.
2. Primer (b): preveri, da je $(-1, 1)$ skupna točka.
4. Uporabi Viètovi formuli.
5. Primer (a): parametra določi tako, da bosta ničli -4 in 2.
6. Primer (a): lik razdeli na trapez in dva pravokotna trikotnika. Primer (b): pomagaj si s temenom ustrezne kvadratne funkcije.
7. Najprej premisli, da če je kvadratna funkcija povsod negativna ali povsod pozitivna, potem je njena diskriminanta manjša od 0.
8. Primer (a): preveri, da je $(1, -1)$ skupna točka. Primer (b): izračunaj teme (p, q) s pomočjo formul in nato poišči zvezo med p in q. Dobljena enačba določa iskano krivuljo.
9. Uporabi Viètovi formuli.
10. Izračunaj kvadrat danega izraza.

Poglavje 5

Polinomi

1. [4] Dan je polinom $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

   (a) S katerim polinomom je potrebno deliti polinom p, da pri tem dobimo kvocient $x^2 - x + 1$ in ostanek $-3x + 3$.

   (b) Poišči vse razcepe polinoma p na produkt dveh polinomov druge stopnje z realnimi koeficienti z vodilnim koeficientom 1.

   (c) Zapiši polinom q, če je $q(x - 1) = p(x)$.

2. [4] Določi vse $b \in \mathbb{R}$ tako, da bo imel polinom $p(x) = x^3 - 12x + b$ ničlo druge stopnje. Nato zapiši razcep polinoma p na linearne faktorje.

3. [9] Dan je polinom p, za katerega velja, da je vsota vseh njegovih koeficientov enaka 8. Velja tudi, da je vsota vseh koeficientov pred sodimi potencami $(1,x^2,x^4,\ldots)$ enaka vsoti vseh koeficientov pred lihimi potencami $(x,x^3,\ldots)$.

   (a) Dokaži, da je -1 ničla polinoma p.

   (b) Poišči predpis polinoma p, če je p polinom tretje stopnje, ki je deljiv z $x^2 + 1$.

4. [1] Ničle polinoma $p(x) = x^3 + 15x^2 + ax + b$ so tri zaporedna cela števila. Izračunaj a in b ter določi ničle polinoma p.

5. [9] Naj bo $p_n(x)$ polinom stopnje n s celoštevilskimi koeficienti, ki je v n različnih celoštevilskih točkah enak n, v točki 0 pa ima vrednost 0. Dokaži, da za $n \geq 5$ tak polinom ne obstaja.

6. [12] Dan je polinom p s celoštevilskimi koeficienti.

   (a) Naj bosta x in y poljubni celi števili. Dokaži, da $x - y$ deli $p(x) - p(y)$.

   (b) Ali obstaja tak polinom p s celoštevilskimi koeficienti, za katerega velja $p(3) = 5$ in $p(6) = 7$? Odgovor utemelji.

7. [9] Naj bodo x_1, x_2, x_3 rešitve enačbe $x^3 + ax^2 + bx + c$, kjer so a, b, c cela števila.

   (a) Pokaži, da velja: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$, $x_1x_2x_3 = -c$.

   (b) Naj bo $f(x)$ polinom s celoštevilskimi koeficienti. Dokaži, da je $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ celo število.

Namigi za reševanje nekaterih nalog

1. Primer (b): zapiši $p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ in s pomočjo enačenja koeficientov poišči vse možne rešitve za a, b, c, d.

2. Upoštevaj, da je $p(x) = (x-a)^2(x-c)$ in s pomočjo enačenja koeficientov poišči vse možne rešitve.

3. Primer (b): upoštevaj, da je $p(x) = a(x^2 + 1)(x + 1)$.

4. Uporabi Viètove formule.

5. Naj bo $q_n(x) = p_n(x) - n$. Oglej si vrednost števila $|q_n(0)|$.

6. Primer (a): zapiši $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ in izračunaj $p(x) - p(y)$.

7. Primer (b): polinom f zapiši v obliki $f(x) = q(x)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+r(x)$, kjer je $r(x)$ nek polinom največ druge stopnje s celoštevilskimi koeficienti. Nato izračunaj $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ in si pomagaj s primerom (a).

Poglavje 6

Racionalne funkcije

1. [4] Glede na parameter m obravnavaj in reši enačbo
$$\frac{m-x^2}{(m-x)^2} = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^3 - mx(2m-x)}.$$

2. Dana je funkcija f s predpisom
$$f(x) = \frac{|x^2-4| - |x-2|}{x^2}.$$
   (a) Predpis funkcije f zapiši brez znakov za absolutno vrednost.

   (b) Zapiši definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole in asimptote funkcije f. Skiciraj tudi njen graf.

   (c) Reši neenačbo $f(x) < 0$.

3. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{2-|x|}$.

   (a) Zapiši funkcijo f brez znakov za absolutno vrednost in skiciraj njen graf.

   (b) Reši neenačbo $|f(x)| \geq 1$.

4. Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x) = \left|\frac{x+6}{3-2x}\right|.$$
   (a) Zapiši f brez znakov za absolutno vrednost.

   (b) Reši neenačbo $f(x) < |3x-2|$.

5. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{|x^2 + 2x|}{x - 1}.$$

   (a) Predpis funkcije f zapiši brez znakov za absolutno vrednost, določi njene ničle in asimptote ter skiciraj graf funkcije f.

   (b) Računsko reši neenačbo $f(x) < |x + 2|$.

6. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{|x^2 + x - 6| - |x - 2|}{x^2 - 1}.$$

   (a) Predpis funkcije f zapiši brez znakov za absolutno vrednost.

   (b) Za funkcijo f določi ničle, asimptote, zalogo vrednosti in skiciraj njen graf.

   (c) Grafično reši neenačbo $f(x) > 0$.

7. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + 3x}{x - 2} \right|.$$

   (a) Predpis funkcije f zapiši brez znakov za absolutno vrednost.

   (b) Za funkcijo f določi ničle, asimptote, zalogo vrednosti in skiciraj graf funkcije f.

   (c) Računsko reši neenačbo $f(x) < |x|$.

Namigi za reševanje nekaterih nalog

1. Dano enačbo pomnoži z izrazom $m(x - m)^2$ in dobljeno kvadratno enačbo reši s pomočjo diskriminante. Upoštevaj, da lahko nekatere rešitve odpadejo (ničle imenovalcev v začetni enačbi).

2.-7. Loči možnosti glede na vrednost izraza/izrazov pod absolutno vrednostjo.

Poglavje 7

Limita in zveznost funkcij

1. S pomočjo definicije dokaži, da je

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty.$$

2. S pomočjo definicije dokaži, da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Ugotovi, koliko je

$$\lim_{x\downarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

in odgovor dokaži s pomočjo definicije!

4. Ugotovi, koliko je

$$\lim_{x\downarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3}$$

in odgovor dokaži s pomočjo definicije limite.

5. Ugotovi, koliko je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

in odgovor dokaži s pomočjo definicije limite.

6. Izračunaj limiti

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1} \text{ in } \lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

7. Izračunaj limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{5x}$,

   (b) $\lim_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

8. Naj bo f funkcija s predpisom

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x-2}.$$

   (a) Za funkcijo f določi naravno definicijsko območje, ničle, pole, asimptote in skiciraj njen graf.

   (b) Določi limite:

$$\lim_{x\to 1} f(x),\ \lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\uparrow -2} f(x),\ \lim_{x\downarrow -2} f(x)$$

9. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x+8}{x+2}, & x < -2 \\ 8x+18, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+9}-3}, & x > 0 \end{cases}.$$

   Ugotovi, ali je funkcija f zvezna v vsaki točki definicijskega območja. Vse sklepe utemelji!

10. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, funkcija $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pa naj bo podana s predpisom

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ ax+b, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2+ax+2x+2a}{x+2}, & x < -2 \end{cases}.$$

   Določi parametra a in b tako, da bo funkcija $f_{a,b}$ zvezna v vsaki točki definicijskega območja. Vse sklepe utemelji!

11. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sin(3x))}{x}, & x < 0 \\ -2x+3, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x-1}-x+1}{\sqrt{x-1}-1}, & x > 2 \end{cases}.$$

Poišči vse točke, v katerih funkcija f ni zvezna. Vse sklepe utemelji!

12. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4-4\sqrt{2-x}}, & x < 1 \\ a, & x = 1 \\ \frac{b\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}.$$

Določi števili a in b tako, da bo funkcija f zvezna. Vse sklepe utemelji!

Namigi za reševanje nekaterih nalog

3. Rezultat je ∞.

4. Rezultat je ∞.

5. Rezultat je ∞.

6. Druga limita: ulomek okrajšaj z $(x-1)$.

11. Izraz $\frac{\sin(\sin(3x))}{x}$ najprej razširi s $\sin(3x)$.

Poglavje 8

Odvod

1. Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije $f(x) = x^3$ v poljubni točki.

2. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}.$$

   Po definiciji izračunaj odvod funkcije f v točki $x = 0$.

3. Podana je družina funkcij $f_\lambda(x) = (\lambda - 3x^{-\frac{2}{3}})e^{\lambda x}$. Določi vse vrednosti realnega števila λ, za katere velja, da je tangenta na f_λ v točki $x = 1$ vzporedna abscisni osi.

4. Dana je družina funkcij $f_a(x) = ax^2 + (a-3)x + 2a$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Določi parameter a tako, da bo premica $y = -3x + 5$ tangenta na graf funkcije f_a. Izračunaj tudi dotikališče.

5. Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{3}{x}\right).$$

6. [14] Za funkcijo f s predpisom $f(x) = m(x^2 - 4)$, $m \neq 0$, določi parameter m tako, da bosta tangenti na graf funkcije v njegovih presečiščih z abscisno osjo med seboj pravokotni.

7. [15] Poišči taki pozitivni realni števili, da bo njuna vsota 1000, njun produkt pa največji možen. Vse korake utemelji!

Namigi za reševanje nekaterih nalog

2. Rezultat je $\frac{\pi}{2}$.

7. Poiskati želimo taki števili x in y, da bo $x + y = 1000$, produkt xy pa največji možen. Naj bo $f(x) = x(1000 - x)$. Poišči maksimum funkcije f na intervalu $(0, 1000)$.

Poglavje 9

Risanje grafov funkcij s pomočjo odvoda

1. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}.$$

Za funkcijo f izračunaj definicijsko območje, ničle, asimptote, stacionarne točke, lokalne ekstreme, območja naraščanja in padanja ter območja konveksnosti in konkavnosti. S pomočjo teh podatkov čimbolj natančno skiciraj njen graf.

2. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - x^2}\right).$$

Za funkcijo f izračunaj definicijsko območje, ničle, navpične asimptote, stacionarne točke, lokalne ekstreme, območja naraščanja in padanja ter območja konveksnosti in konkavnosti. S pomočjo teh podatkov čimbolj natančno skiciraj njen graf.

3. Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene ničle.

   (b) Izračunaj in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f ter določi intervale naraščanja in padanja.

   (c) Skiciraj graf funkcije f in zapiši njeno zalogo vrednosti.

(d) Reši neenačbo $|f(x)| < \ln 5$.

4. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

   (a) Za funkcijo f določi definicijsko območje, ničle in navpične asimptote. Izračunaj tudi $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

   (b) Določi intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f. Poišči tudi stacionarne točke in jih klasificiraj.

   (c) Skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

5. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}.$$

   Za funkcijo f določi definicijsko območje in ničle. Določi tudi intervale naraščanja in padanja ter klasificiraj stacionarne točke. Določi še intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter njene prevoje. Nazadnje skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

6. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

   (a) Predpis funkcije f preoblikuj tako, da bo oblike $f(x) = A\sin(wx+\varphi)$, kjer so A, w, φ neka realna števila.

   (b) Za funkcijo f določi definicijsko območje, ničle ter osnovno periodo. Poišči tudi intervale naraščanja in padanja ter klasificiraj stacionarne točke. Določi še intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter njene prevoje.

   (c) Skiciraj graf funkcije f in zapiši njeno zalogo vrednosti.

7. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4).$$

   (a) Za funkcijo f določi naravno definicijsko območje, ničle in navpično asimptoto. Določi še $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ter $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Poišči intervale naraščanja in padanja ter klasificiraj stacionarne točke funkcije f (če obstajajo). Določi še intervale konveksnosti in konkavnosti.

(c) Približno skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

8. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Zapiši naravno definicijsko območje funkcije f ter poišči njene ničle. Razišči tudi obnašanje funkcije f na robovih definicijskega območja ter s pomočjo dobljenega določi njene asimptote.

(b) Določi območja naraščanja in padanja ter poišči stacionarne točke. Določi območja konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter izračunaj njene prevoje.

(c) Nariši graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

9. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene ničle. Razišči tudi obnašanje funkcije f na robu definicijskega območja (enostranske limite v točkah, kjer f ni definirana, ter limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x)$).

(b) Izračunaj intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f. Določi tudi lokalne ekstreme in jih klasificiraj.

(c) Skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

10. [14] Za funkcijo $f(x) = x\sqrt{x+3}$ določi definicijsko območje, ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti ter nariši njen graf.

11. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

(a) Zapiši naravno definicijsko območje funkcije f ter poišči njene ničle (če obstajajo).

(b) Izračunaj limite funkcije f na robovih definicijskega območja.

(c) Določi območja naraščanja in padanja ter poišči stacionarne točke in jih klasificiraj.

(d) Nariši graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

12. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = x + e^{-x}$.

    (a) Določi definicijsko območje, ničle (če obstajajo) in poševno asimptoto funkcije f.

    (b) Določi intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti. Poišči stacionarne točke in jih klasificiraj.

    (c) Skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

13. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = x\sqrt{3x - x^2}.$$

    (a) Določi definicijsko območje funkcije f in poišči njene ničle.

    (b) Določi intervale naraščanja in padanja funkcije f ter zapiši in klasificiraj vse globalne ekstreme.

    (c) Skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

14. Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}.$$

    (a) Za funkcijo f določi definicijsko območje, ničle in asimptote.

    (b) Poišči intervale naraščanja in padanja funkcije f ter zapiši in klasificiraj lokalne ekstreme. Poišči tudi intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje.

    (c) Skiciraj graf funkcije f in določi njeno zalogo vrednosti.

Namigi za reševanje nekaterih nalog

6. Primer (a): v izrazu izpostavi faktor 2, nato upoštevaj, da je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ in $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nazadnje uporabi adicijski izrek. V splošnem izrazu $a\cos x + b\sin x$ izpostaviš faktor $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Poglavje 10

Transcendentne funkcije

1. [10] Reši enačbo
$$3\sin^2 x = 2\sin 2x - 1.$$

2. [10] Reši enačbo
$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$$

3. [1] Reši enačbo
$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 5.$$

4. Reši enačbe:

   (a) $3\sin x - \sin^2 x = \cos(2x) + 3$,

   (b) $\sin x \cdot \sin(3x) = \sin(5x) \cdot \sin(7x)$,

   (c) $\arccos(\cos(-\frac{5\pi}{4})) = x$.

5. Reši enačbo
$$\sin x + 2\cos x + 2 = 0.$$

6. [10] Reši enačbo
$$\cos x + \cos(7x) + \cos(4x) = 0.$$

7. [10] Reši enačbo
$$\sin(2x) - \cos(3x) = 0.$$

8. Izračunaj vrednost izraza $\arcsin(\sin(\frac{11\pi}{8}))$.

9. [9] Reši neenačbo
$$\frac{1}{1+\ln x}+\frac{1}{1-\ln x}>2.$$

10. Glede na parameter $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ obravnavaj in reši neenačbo
$$\log_a\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)>0.$$

11. Reši neenačbi
    (a) $2^x-2^{2-x}<3$,
    (b) $\ln(1-x)-\ln(1+\sqrt{x})<0$.

12. Reši enačbi:
    (a) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$,
    (b) [10] $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

13. [1] Reši enačbo
$$\log_{\sin x}(\cos x)-2\log_{\cos x}(\sin x)+1=0.$$

14. [1] Pokaži naslednji trditvi:
    (a) $\cos(\cos(x))>0$ za vsak $x\in\mathbb{R}$,
    (b) $3-4\cos x+\cos(2x)\geq 0$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.

15. [10] Dokaži, da za vsak $x\in\mathbb{R}$ velja
$$2(\cos^6 x+\sin^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)=-1.$$

16. [13] Dokaži, da je
$$\frac{1}{\log_2 2019}+\frac{1}{\log_3 2019}+\cdots+\frac{1}{\log_{1000} 2019}=\frac{1}{\log_{1000!} 2019},$$
kjer je $1000!=1\cdot 2\cdots 999\cdot 1000$.

17. Naj bodo $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, tako da velja tudi $c+b, c-b, a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Dokaži, da je trikotnik s stranicami a,b,c, ki zadoščajo enakosti $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$, pravokoten.

18. [11] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{2\sin x + \tan x}{\sin x}.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene ničle.

(b) Ugotovi, ali je f liha oz. soda.

(c) Ugotovi, ali funkcija f v točki z absciso $x = \frac{\pi}{4}$ pada oz. narašča.

19. Naj bosta $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in [0, \pi]$ in naj bo f funkcija s predpisom $f(x) = \tan(ax+b)$.

(a) Za števili $a = 1$ in $b = \frac{\pi}{4}$ reši neenačbo $f\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1$.

(b) Določi števili a in b tako, da bodo premice $x = \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$, predstavljale vse pole funkcije f.

20. [10] Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dana s predpisom $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$.

(a) Reši enačbo $f(x) = 2$.

(b) Dokaži, da funkcija f ni periodična.

21. Podana je funkcija f s predpisom $f(x) = \log_x(10)$.

(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in reši enačbo $f(x) = 2\log_{2x}(10)$.

(b) Preveri, da je f strogo padajoča na vsakem intervalu, kjer je definirana.

22. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = |\ln x - 2| + |\ln x - 3|.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije f, zapiši funkcijo f brez znakov za absolutno vrednost in skiciraj njen graf.

(b) S pomočjo narisanega grafa reši neenačbo $f(x) > 1$.

(c) Ali je funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana? Odgovor utemelji!

23. Izračunaj naravni definicijski območji funkcij f in g, če sta funkciji podani s predpisoma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\pi x)}} \quad \text{in} \quad g(x) = \arcsin\left(\log_3(2x - 1)\right).$$

Namigi za reševanje nekaterih nalog

1. Enačbo prepiši v obliko $3\sin^2 x = 4\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x$ in jo deli z izrazom $\cos^2 x$ (preveri, da $\cos x \neq 0$).
2. Vpelji novo spremenljivko $t = 2^{\sin^2 x}$.
3. Vpelji novo spremenljivko $t = 4^{\sin^2 x}$.
4. Primer (a): enačbo najprej preoblikuj tako, da bo v njem nastopala samo kotna funkcija sinus. Primer (b): na obeh straneh najprej uporabi formulo za pretvarjanje produkta kotnih funkcij v vsoto, nato uporabi fomrulo za pretvarjanje vsote oziroma razlike kotnih funkcij v produkt. Primer (c): upoštevaj, da je $\arccos(\cos x) = x$ za vsak $x \in [0, \pi]$, zato izraz najprej preoblikuj tako, da bo znotraj funkcije kosinus število iz intervala $[0, \pi]$.
5. Upoštevaj, da je $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ in $2 = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$. Nato enačbo deli z izrazom $\cos^2\frac{x}{2}$ (preveri, da $\cos\frac{x}{2} \neq 0$).
6. Za prva dva člena na levi strani uporabi formulo za pretvarjanje vsote kotnih funkcij v produkt.
7. Najprej upoštevaj, da je $\cos(3x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$. Nato uporabi formulo za pretvarjanje razlike kotnih funkcij v produkt.
8. Najprej upoštevaj, da je $\sin x = \sin(\pi - x)$ za $x \in \mathbb{R}$. Nato uporabi še dejstvo, da za vsak $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ velja $\arcsin(\sin x) = x$.
9. Vpelji novo spremenljivko $t = \ln x$ in reši racionalno neenačbo.
10. Posebej obravnavaj primer, ko je $a \in (0, 1)$ in ko je $a > 1$.
11. Primer (a): vpelji novo spremenljivko $t = 2^x$. Primer (b): preveri, za katere x je neenačba dobro definirana.
12. Primer (a): antilogaritmiraj in vpelji novo spremenljivko $t = 7^x$. Primer (b): uporabi adicijski izrek za tangens in vpelji novo spremenljivko $t = \tan x$.
13. Izraz na levi strani preoblikuj tako, da bosta imela logaritma enako osnovo. Nato vpelji ustrezno novo spremenljivko.
14. Primer (a): upoštevaj, da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \cos x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. Primer (b): upoštevaj, da je $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, nato vpelji novo spremenljivko $t = \cos x$.

15. S pomočjo potenciranja izraza $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ pokaži, da velja $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ in $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

16. Vse logaritme na levi strani izraza spremeni na isto osnovo.

17. Logaritme spremeni na osnovo a in pokaži, da velja $a^2 + b^2 = c^2$.

19. Primer (b): upoštevaj, da če je v točki x pol funkcije f, potem velja $ax + b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

20. Primer (a): veljati mora $\cos x = 1$ in $\cos(\sqrt{2}x) = 1$ (pokaži, da to ni možno). Primer (b): uporabi rezultat iz primera (a).

21. Uporabi formulo za prehod na novo osnovo logaritma.

22. Primer (a): loči tri možnosti: $x \in (0, e^2)$, $x \in [e^2, e^3]$ in $x > e^3$.

Literatura

[1] D. Felda, A. Tiegl, M. Željko, Rešene naloge iz matematike s šolskih in izbirnih tekmovanj: 1975-1991, DMFA, Ljubljana, 1991.

[2] J. Globevnik, M. Brojan, Analiza I, DMFA, Ljubljana, 2016 (starejša verzija dosegljiva na naslovu `https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf` dne 12. 9. 2019).

[3] D. Grešak, M. Strnad, A. Tiegl, Elementarne funkcije; Kompleksna števila, DZS, Ljubljana, 2001.

[4] M. Jakovac, N. Tratnik, Zbrano gradivo: vaje iz elementarnih funkcij, Maribor, 2019 (dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2019/01/ef_gradivo_vaje-1.pdf` dne 12. 9. 2019).

[5] D. Kavka, Matematika v srednji šoli, Modrijan založba d.o.o., Ljubljana, 2003.

[6] P. Legiša, Kotne funkcije; Trigonometrija, DZS, Ljubljana, 1999.

[7] P. Legiša, Kompleksna števila; Eksponentna funkcija in logaritem; Merjenje v geometriji, DZS, Ljubljana, 2000.

[8] P. Legiša, Odvod; Integrali, DZS, Ljubljana, 1995.

[9] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[10] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 2, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[11] Splošna matura - matematika, Izpitne pole, RIC (dosegljivo na naslovu `https://www.ric.si/splosna_matura/predmeti/matematika/` dne 12. 9. 2019).

[12] M. Željko, Rešene naloge iz matematike z državnih in izbirnih tekmovanj. Del 4, DMFA, Ljubljana, 1996.

[13] M. Željko, Rešene naloge iz matematike s srednješolskih tekmovanj. Del 5, DMFA, Ljubljana, 2007.

[14] J. Žerovnik, I. Banič, I. Hrastnik Ladinek, S. Špacapan, Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike, 4. izdaja, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2011.

[15] P. Žigert Pleteršek, M. Črepnjak, Visokošolski učbenik z rešenimi nalogami: Matematika I, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Maribor, 2013.

[16] P. Žigert Pleteršek, M. Črepnjak, Testi in izpiti pri predmetu Matematika I, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Maribor (dosegljivo na naslovu https://www.fkkt.um.si/ukemat/rezultati.php dne 12. 9. 2019).