UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Marko Jakovac, dr. Niko Tratnik

Zbrano gradivo: vaje iz elementarnih funkcij

Maribor, 2019

PREDGOVOR

V tem gradivu so zbrane naloge, ki so primerne za ponavljanje in nadgradnjo srednješolskega znanja iz elementarnih funkcij ter so predvsem namenjene študentom prvega letnika matematike. V prvem poglavju je podanih nekaj osnovnih definicij in pojmov. Zbirka je nastala v sklopu priprav na vaje pri predmetu Elementarne funkcije, pri izbiri nalog pa sva si pomagala z obstoječimi učbeniki, zbirkami vaj in internetnimi viri.

Kazalo

Poglavje 1

Uvodni pojmi

V tem poglavju bomo podali definicije nekaterih osnovnih pojmov o logiki, množicah, realnih številih in funkcijah. Več lahko najdemo na primer v literaturi [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Logika

Izjava je neka smiselna poved, za katero lahko določimo, ali je pravilna ali nepravilna. Če je izjava pravilna, ji priredimo logično vrednost 1, če je nepravilna pa vrednost 0. V nadaljevanju bomo izjave označevali z velikimi tiskanimi črkami. Oglejmo si nekaj izjav, ki jih lahko tvorimo iz drugih izjav.

Negacija izjave A, ki jo označimo kot $\neg A$, je izjava, ki je pravilna, če je izjava A nepravilna in obratno.

Konjunkcija izjav A in B, ki jo označimo kot $A \wedge B$, je izjava, ki je pravilna samo takrat, ko sta A in B obe pravilni. Izjavo $A \wedge B$ beremo kot A *in* B.

Disjunkcija izjav A in B, ki jo označimo kot $A \vee B$, je izjava, ki je nepravilna samo takrat, ko sta A in B obe nepravilni. Izjavo $A \vee B$ beremo kot A *ali* B.

Implikacija izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Rightarrow B$, je izjava, ki je nepravilna samo takrat, ko je A pravilna in B nepravilna. Izjavo $A \Rightarrow B$ beremo kot *iz* A *sledi* B oziroma tudi *če* A*, potem* B.

Ekvivalenca izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Leftrightarrow B$, je izjava, ki je pravilna samo takrat, ko sta A in B obe pravilni ali obe napravilni. Izjavo $A \Leftrightarrow B$ beremo kot A *natanko tedaj ko* B oziroma tudi A *če in samo če* B.

Definicije zgornjih sestavljenih izjav lahko podamo tudi z resničnostno tabelo:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Izjava, ki je zmeraj pravilna (pri vsakem naboru logičnih vrednosti osnovnih izjav), se imenuje *tavtologija*.

Množice

Množica je nek dobro definiran nabor objektov, ki jih imenujemo tudi *elementi* množice. Množice bomo običajno označevali z velikimi črkami, medtem ko za elemente množic večinoma uporabljamo male črke. Kadar nek element a *pripada* množici A, to s simboli zapišemo kot $a \in A$.

Množico lahko podamo tako, da naštejemo vse njene elemente, na primer

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

ali pa tako, da zapišemo pogoje, ki karakterizirajo elemente v množici, na primer

$$A = \{n \,|\, n \text{ je naravno število in } n < 6\}.$$

Pravimo, da je množica B *podmnožica* množice A, če velja, da je vsak element iz B tudi element iz A. V tem primeru pišemo $B \subseteq A$ ali $B \subset A$. Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, če velja $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$.

Množico, ki ne vsebuje nobenega elementa, imenujemo *prazna množica* ali tudi *ničelna množica* in jo označimo kot $\emptyset$ ali $\{\}$. Po drugi strani množico vseh elementov, ki nas v neki situaciji zanimajo, imenujemo *univerzalna množica*.

Kadar neka množica A vsebuje končno mnogo elementov, rečemo, da je A *končna*, število elementov v množici pa imenujemo *moč množice* in ga označimo kot $|A|$. Razred vseh množic, ki so podmnožice neke dane množice A, se imenuje *potenčna množica* od A in se označi kot $\mathcal{P}(A)$. Kadar je A končna množica, ima potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ natanko $2^{|A|}$ elementov.

Pogosto bomo srečevali naslednje številske množice:

- $\mathbb{N}$ - množica naravnih števil,

- $\mathbb{Z}$ - množica celih števil,
- $\mathbb{R}$ - množica realnih števil.

Operacije z množicami

Unija množic A in B, ki jo označimo kot $A \cup B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo A ali B. Bolj natančno,

$$A \cup B = \{x \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Presek množic A in B, ki ga označimo kot $A \cap B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo A in B. Bolj natančno,

$$A \cap B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Razlika množic A in B, ki jo označimo kot $A \backslash B$ ali $A - B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo A vendar ne pripadajo B. Bolj natančno,

$$A \setminus B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Naj bo $\mathcal{U}$ univerzalna množica in $A \subseteq \mathcal{U}$ poljubna množica. *Komplement* množice A, ki ga označimo kot $\overline{A}$ ali A^c, je množica vseh elementov, ki pripadajo $\mathcal{U}$ vendar ne pripadajo A. Bolj natančno,

$$A^c = \overline{A} = \{x \,|\, (x \in \mathcal{U}) \wedge (x \notin A)\}.$$

Kartezični produkt množic A in B, ki ga označimo kot $A \times B$, je množica vseh urejenih parov elementov, kjer prvi element v paru pripada A, drugi element v paru pa pripada B. Bolj natančno,

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Za operacije z množicami med drugim veljajo naslednje lastnosti:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,

6. $(A^c)^c = A$,

7. $A \cup A^c = \mathcal{U}$, $A \cap A^c = \emptyset$,

8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (DeMorganova zakona).

Funkcije

Naj bosta A, B neprazni množici. *Funkcija* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko en element množice B. Če funkcija f elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, rečemo, da je b *slika* elementa a in pišemo $b = f(a)$. Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico B pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* funkcije f je definirana kot

$$Z_f = \{f(a) \,|\, a \in A\}.$$

Naj bo $X \subseteq A$. *Slika* množice X je definirana kot

$$f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

Naj bo $Y \subseteq B$. *Praslika* množice Y je definirana kot

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \,|\, f(a) \in Y\}.$$

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : C \to D$ takšni funkciji, da je $B \subseteq C$. Funkcija $g \circ f : A \to D$, ki je definirana s predpisom $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, se imenuje *kompozitum* funkcij f in g.

Funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za poljubna elementa $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če za poljuben element $b \in B$ obstaja $a \in A$, tako da velja $b = f(a)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Naj bo $f : A \to B$ bijektivna funkcija. Potem definiramo *inverzno funkcijo* $f^{-1} : B \to A$ na naslednji način: za poljuben $b \in B$ naj bo $a \in A$ tak, da je $f(a) = b$. Potem je $f^{-1}(b) = a$.

Realna števila

Uporabljajo se naslednje oznake za posebne podmnožice realnih števil, ki jih imenujemo *intervali*. V naslednjih definicijah naj bosta a, b poljubni realni števili in naj velja $a < b$.

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$,
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$,
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$,
4. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$,
5. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$,
6. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$,
7. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$,
8. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$,
9. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Racionalna in iracionalna števila

Realno število a je *racionalno*, če ga lahko zapišemo v obliki ulomka, torej če velja $a = \frac{m}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{Z}$. Oznaka za množico vseh racionalnih števil je $\mathbb{Q}$. Realna števila, ki niso racionalna, so *iracionalna*. Primeri iracionalnih števil so na primer števila $\sqrt{2}, \pi, e$.

Supremum in infimum

Naj bo A neka neprazna podmnožica realnih števil. Rečemo, da je A *navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da velja $a \leq M$ za vsak $a \in A$. Vsako tako število M imenujemo *zgornja meja* množice A. Podobno je A *navzdol omejena*, če obstaja tako realno število m, da velja $a \geq m$ za vsak $a \in A$. Vsako tako število m imenujemo *spodnja meja* množice A. Množica A je *omejena*, če je navzgor omejena in navzdol omejena.

Zlahka vidimo, da ima navzgor omejena množica neskončno mnogo zgornjih mej, podobno pa velja tudi za navzdol omejeno množico. Zato sta smiselni naslednji definiciji.

Realno število M je *supremum* množice A, če velja:

1. M je zgornja meja množice A,
2. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, tako da je $a > M - \varepsilon$.

V takem primeru pišemo $M = \sup A$, število M pa imenujemo tudi *najmanjša zgornja meja* ali *natančna zgornja meja*.

Realno število m je *infimum* množice A, če velja:

1. m je spodnja meja množice A,
2. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, tako da je $a < m + \varepsilon$.

V takem primeru pišemo $m = \inf A$, število m pa imenujemo tudi *največja spodnja meja* ali *natančna spodnja meja*.

Elementarne funkcije

Pod elementarne funkcije prištevamo naslednje funkcije, ki slikajo iz neke podmnožice realnih števil v podmnožico realnih števil: linearna in kvadratna funkcija, polinomi in racionalne funkcije, potenčne in korenske funkcije, kotne in krožne funkcije, eksponentne in logaritemske funkcije ter druge funkcije, ki jih lahko dobimo kot kombinacije prej omenjenih funkcij. Več o posameznih funkcijah lahko najdemo v viru [2]. V naslednjih poglavjih so zbrane naloge, ki so se uporabljale na vajah pri predmetu Elementarne funkcije. Še enkrat poudarimo, da nekatere naloge niso originalni prispevki, saj so vzete (ali prirejene) iz raznih zbirk, priprav dr. Mateje Grašič in drugih internetnih virov. Naloge so urejene v sklope po posameznih temah, na koncu je dodana tudi literatura, kjer lahko najdemo podrobno razloženo teorijo in dodatne naloge.

Poglavje 2

Logika in množice

1. Naj bodo A, B, C, D izjave. Za vsako izmed naslednjih izjav preveri, ali je tavtologija:

   (a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,

   (b) $A \wedge A \Leftrightarrow A$,

   (c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (kontrapozicija implikacije),

   (č) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (negacija implikacije),

   (d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$,

   (e) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (negacija disjunkcije),

   (f) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (negacija konjunkcije),

   (g) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (distributivnost),

   (h) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (distributivnost).

2. Dana je izjava: *Če kobilice napadejo Maribor, postanejo vsi Mariborčani lačni.* Ugotovi, v katerih primerih je dana izjava resnična oziroma neresnična.

3. Tone je izjavil: *Če mi bo oče posodil avto, bom prišel pod okno in vrgel kamen.*

   (a) Dano izjavo zapiši s simboli.

   (b) Tone se je zlagal. Kaj se je v resnici zgodilo?

4. Dane so naslednje izjave:
   A: če je nekaj slepo, potem je to človeška ribica,

B: če je nekaj človeška ribica, potem je to slepo,

C: če nekaj ni slepo, potem to ni človeška ribica,

D: če nekaj ni človeška ribica, potem to ni slepo,

X: vse človeške ribice so slepe.

Ugotovi, katera izmed izjav A, B, C in D je ekvivalentna izjavi X.

5. Dane so naslednje izjave:

   A: noben avto ni BMW,

   B: niso vsi avti BMW,

   C: vsaj en avto ni BMW,

   D: vsaj en avto je Mercedes,

   X: $\neg$(vsi avti so BMW).

   Ugotovi, katera izmed izjav A, B, C in D je ekvivalentna izjavi X.

6. Skiciraj podane množice in določi relacije med njimi:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\}$,

   $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 8\}$,

   $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$.

7. Skiciraj množico

$$A = \Big(\mathbb{Z} \times [-1, 1]\Big) \cap \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\Big\}.$$

8. Skiciraj množico

$$A = \Big(\{-1, 1\} \times (-1, 1)\Big) \cup \Big((-1, 1) \times \{-1, 1\}\Big).$$

9. Skiciraj podane množice in določi relacije med njimi:

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$,

   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$,

   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. Podani sta množici $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 \leq 0\}$, $B = \mathbb{R} \times \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ in $C = \big(-2, 2\big) \times \big(-1, 1\big)$. Skiciraj množice A, B, C, $A \cap B, B \cap C$.

11. V ravnini je podan pravokotnik z oglišči $A(-1, -2)$, $B(3, y_2)$, $C(x_3, 2)$ in $D(x_4, y_4)$. Stranica AB je vzporedna z osjo x.

(a) Zapiši neznane koordinate in nariši pravokotnik.

(b) Zapiši pogoj za točke na nosilkah stranic AB in CD.

12. V ravnini je dan pozitivno orientiran kvadrat z dolžino stranice 4 enote in ogliščem $A(-3,-1)$. Stranica AB naj bo vzporedna osi x.

    (a) Nariši kvadrat in določi koordinate oglišč.

    (b) Izračunaj dolžino diagonale.

    (c) Nariši diagonali in določi koordinati presečišča diagonal.

Poglavje 3

Funkcije

1. Naj bo f funkcija, ki vsakemu človeku priredi njegov mesec rojstva. Za funkcijo f zapiši definicijsko območje, primer zaloge vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.

2. Naj bo f funkcija, ki vsakemu državljanu priredi njegov EMŠO. Za funkcijo f zapiši definicijsko območje, primer zaloge vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.

3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^2$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

4. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

5. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

6. Naj bo $A = [1, 3]$ in $B = [2, 5]$. Poišči vsaj eno bijekcijo $f : A \to B$ in dokaži, da je res bijekcija.

7. Naj bo $A = (0, 1)$ in $B = \mathbb{R}$. Poišči vsaj tri različne bijekcije $f : A \to B$.

8. Določi podmnožici realnih števil A in B tako, da bo funkcija $f : A \to B$, podana s predpisom $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$, bijektivna. Zapiši tudi predpis inverzne funkcije f^{-1}.

9. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ je sod} \\ 3n+1, & n \text{ je lih.} \end{cases}$$

   Ali je funkcija f injektivna oziroma surjektivna?

10. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}x; & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Ugotovi, ali je f injektivna oziroma surjektivna.

11. Podana je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ s predpisom $f(a) = \sqrt{(a-1)^2}$.

   (a) Skiciraj graf funkcije f.

   (b) Ugotovi, ali je funkcija f injektivna ali surjektivna.

   (c) Če f ni bijektivna, ustrezno spremeni domeno, da bo.

12. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 1$. Določi $f([0, \infty))$, $f^{-1}((1, 3])$ in $f^{-1}((-2, -1))$.

13. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Določi $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}])$.

14. Naj bo $A = (0, 1) \times \mathbb{Z}$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x, k) = x + k$.

   (a) Določi $f(A)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$ in $f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$.

   (b) Dokaži, da je f injektivna.

15. Naj bo $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ funkcija s predpisom $F(n, m) = n - m$.

   (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna.

   (b) Določi množico $F^{-1}\big(\{-2, 2\}\big)$ in jo skiciraj v $\mathbb{R}^2$.

16. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podani s predpisoma $f(x) = 2^x$ in $g(x) = x - 1$. Določi predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$. Ali sta ti dve funkciji bijektivni? Če sta, to tudi dokaži.

17. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Zapiši predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$ ter nariši grafe vseh štirih funkcij.

18. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ 3 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Zapiši predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$.

19. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če sta funkciji f in g injektivni, potem je $g \circ f$ injektivna.

20. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če sta funkciji f in g surjektivni, potem je $g \circ f$ surjektivna.

21. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če je funkcija $g \circ f$ injektivna in f surjektivna, potem je g injektivna.

Poglavje 4

Realna števila

1. Naj bo p praštevilo. Dokaži, da je $\sqrt{p}$ iracionalno število.
2. Dokaži, da je število $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalno.
3. Dokaži, da je število $\log_2 3$ iracionalno.
4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno.
5. Naj bo q neničelno racionalno število, x in y pa naj bosta iracionalni števili in naj velja $x > 0$.
   (a) Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + x$ in qx iracionalna.
   (b) Ali lahko kaj podobnega poveš o številih $x + y$, xy in $\sqrt{q}$?
6. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum naslednjih množic, če obstajajo:
   (a) $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$,
   (b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 3\} \subseteq \mathbb{R}$,
   (c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\} \subseteq \mathbb{R}$,
   (d) $D = \{\frac{4n-3}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
   (e) $E = \{\frac{3}{1+x^2} - 1 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$,
   (f) $F = \{x \in [0, 1] \mid x$ ima v decimalnem zapisu vsaj dve petki$\} \subseteq \mathbb{R}$,
   (g) $G = \{x^2 - 9x \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}$,
   (h) $H = \{x^2 + x \mid x \in (-1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}$.

7. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Skiciraj graf funkcije f in ugotovi, ali je f injektivna oziroma surjektivna.

(b) Določi minimume, maksimume, supemume in infimume (če obstajajo) množic Z_f, $f((-2,2))$, $f([-3,0))$, $f((-\infty,-1])$, $f([0,3])$, $f^{-1}([-2,2])$.

Poglavje 5

Stožnice

1. Podani sta množici $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 4x + y^2 \leq 5\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 4x + y^2 = 5\}$.

   (a) Skiciraj A in B ter ugotovi, ali množica B predstavlja graf kake realne funkcije realne spremenljivke.

   (b) Določi množici X in Y tako, da bo del množice B predstavljal graf neke bijektivne funkcije $f : X \to Y$.

   (c) Poišči inverz funkcije f ter skiciraj grafa funkcij f in f^{-1}.

2. Določi parameter m tako, da bo točka $T(-1, 5)$ ležala na krožnici $(x - 2m)^2 + (y - m)^2 = 25$.

3. Pokaži, da enačba $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ podaja krožnico le, če velja $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

4. Določi enačbo krožnice, očrtane trikotniku, ki ga določajo premice $x+y-3 = 0$, $5x + 4y - 16 = 0$ in $3x + 2y - 8 = 0$.

5. Izpelji enačbo elipse v središčni legi.

6. Zapiši enačbo elipse v središčni legi in veliko osjo na abscisi, če merita razdalji enega gorišča od obeh krajišč velike osi 9 enot in 3 enote.

7. Izračunaj ploščino pravokotnika, katerega oglišča so presečišča elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ in kroga $x^2 + y^2 = 52$.

8. Razišči medsebojno lego premice $x - 2y - 10 = 0$ in elipse $5x^2 + 2y^2 = 8$.

9. Izpelji enačbo hiperbole v središčni legi.

10. Elipsa $3x^2 + 5y^2 = 120$ in enakoosna hiperbola imata skupni gorišči. Določi enačbo hiperbole.

11. V enačbi $16x^2 - 9y^2 - 32x + 36y + a = 0$ določi a tako, da enačba ne bo predstavljala hiperbole.

12. Na hiperboli z enačbo $x^2 - y^2 = 4$ in goriščema F_1 ter F_2 določi take točke T, da bo trikotnik F_1F_2T pravokoten s pravim kotom pri T.

13. Napiši enačbo hiperbole, ki ima asimptoti $y = x + 4$ in $y = -x - 2$, če se eno gorišče hiperbole ujema z goriščem parabole $y^2 - 2y - 8x - 7 = 0$.

14. Izpelji enačbo parabole v središčni legi.

15. Izračunaj dolžino daljice, ki jo odreže parabola $y^2 = x$ od premice $y = x - 2$.

16. Določi enačbo parabole s temenom v koordinatnem izhodišču, če se njeno gorišče ujema z desnim goriščem elipse $x^2 + 5y^2 = 5$.

17. Napiši enačbo elipse, ki ima središče v temenu parabole $y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$, eno gorišče se ujema z goriščem parabole in velja, da se elipsa dotika abscisne osi.

Poglavje 6

Linearna in kvadratna funkcija, absolutna vrednost

1. Katera od danih tabel predstavlja linearno funkcijo?

x	y
0	1
1	-3
2	-7

x	y
2	1
0	-3
1	1

2. Določi predpis funkcije, ki obsegu kroga priredi njegov premer.

3. Določi smerna koeficienta premic, ki sta dani z enačbama $2x - 3y + 1 = 0$ in $4x - 5y + 6 = 0$ ter skiciraj njuna grafa (s pomočjo premikov).

4. Določi predpis funkcije, ki podatku o temperaturi v stopinjah Fahrenheit priredi vrednost v stopinjah Celzija, če vemo, da 32°F pomeni 0°C in 212°F pomeni 100°C. Kdaj temperaturi sovpadata?

5. Za en dan nameravamo najeti avto. Podjetje A zahteva 40 EUR in 0,15 EUR za vsak prevožen kilometer. Podjetje B pa računa 30 EUR in 0,20 EUR za vsak prevožen kilometer. Katera od obeh možnosti je, glede na število kilometrov, ki jih namrevamo prevoziti, ugodnejša?

6. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linearna funkcija. Dokaži, da za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$f(2a - b) = 2f(a) - f(b).$$

7. Dana je družina funkcij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, danih s predpisom

$$f_n(x) = (2-n)x + 3 - n,$$

kjer je n naravno število. Dokaži, da imajo grafi vseh funkcij f_n skupno točko.

8. Ploščina trikotnika ABC je enaka 8, dve oglišči pa sta $A(3,2)$ in $B(-2,1)$. Tretje oglišče C leži na premici $y = 1 - \frac{x}{2}$. Določi koordinati točke C.

9. Dana je družina premic $y = ax + 7a - 3$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Določi vse točke (x, y) v ravnini, ki ne ležijo na nobeni od premic iz družine.

10. Obravnavaj enačbo

$$\frac{mx}{n} + \frac{nx}{m} = \frac{m^2 - n^2}{mn} + 2x.$$

11. Obravnavaj enačbo

$$n(nx - 1) = k(kx + 1).$$

12. Obravnavaj neenačbo

$$ax + 2a > bx + 2b.$$

13. Obravnavaj neenačbo

$$a^2x - a^4 < x - 1.$$

14. Izpelji formulo za rešitve kvadratne enačbe.

15. S pomočjo premikov in raztegov skiciraj graf kvadratne funkcije, podane s predpisom $f(x) = 4x^2 + 10x + 2$.

16. Izpelji formuli za koordinati temena kvadratne funkcije.

17. Dan je polkrog s premerom $|AB| = 10$ cm. Naj bo točka T, ki leži na daljici AB, oddaljena x cm od točke A. Nad AT in TB konstruiramo polkroga. Naj bo $f(x)$ ploščina območja, ki ga omejujejo vsi trije polkrogi. Zapiši predpis za $f(x)$ in ugotovi, za kateri x je ploščina največja.

18. Kakšen pravokotnik ima pri danem obsegu o največjo ploščino?

19. Izpelji Vietovi formuli.

20. Ne da bi izračunal rešitvi x_1 in x_2 enačbe $x^2 + 2x - 9 = 0$, določi vrednost $x_1^2 + x_2^2$.

21. Opiši postopek reševanja kvadratne neenačbe in reši kvadratno neenačbo $x^2 - 2x - 3 < 0$.

22. Obravnavaj enačbi $x^2 + x + a = a^2$ in $m^2x^2 + 2mx = m^2 - 1$.

23. Leta 1974 je stric Pepi izjavil: *Če pomnožim svojo starost s starostjo pred 6 leti, dobim letnico svojega rojstva.* Kdaj je bil rojen stric Pepi?

24. Bazen polnita dva izvira: topli in mrzli. Oba skupaj ga napolnita v 6 urah. Mrzli izvir sam bi bazen napolnil 5 ur prej kot topli izvir sam. V kolikšnem času bi mrzli izvir sam napolnil bazen?

25. V mlin so pripeljali pošiljko pšenice. Mlinar ima 2 stroja. Prvi stroj sam bi za mletje potreboval 14 ur več kot drugi stroj sam. Potem ko je prvi stroj dve uri mlel sam, so vključili še drugega in po 19 urah in 35 minutah skupnega dela je bila vsa pšenica zmleta. Koliko časa bi za mletje potreboval prvi stroj sam?

26. Reši naslednje enačbe in neenačbe:

    (a) $\frac{x^2-1}{x-4} > 0$,

    (b) $|x| = |x-1| + 1$,

    (c) $|x^2 - 1| + 1 \leq |x+2|$,

    (d) $|\frac{x^2-1}{x-7}| < 2$,

    (e) $|1 - |x-1|| < 1$,

    (f) $|2 + |x^2 - 4|| > 10$.

27. Skiciraj graf funkcije, ki je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$.

28. Nariši grafa funkcij, ki sta podani s predpisoma $f(x) = ||x-2| - 1|$ in $g(x) = |2x+2| - |2x-2|$.

29. Skiciraj grafa funkcij, ki sta podani s predpisoma $f(x) = 2x + |1 - x^2|$ in $g(x) = |1 - x^2| + |4 - x^2|$.

Poglavje 7

Potenčne in korenske funkcije

1. Poenostavi naslednje izraze:

   (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,

   (b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{4+\sqrt{14}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{14}}$,

   (c) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$,

   (d) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$,

   (e) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

2. Določi presečišča grafov funkcij $f(x) = \sqrt{20} - x^2$ in $g(x) = x^{-2}$. Nariši tudi ustrezno sliko!

3. Reši enačbe:

   (a) $(2x-1)^{-3} = 8$,

   (b) $(x^2-5)^2 = 1$,

   (c) $(2x+3)^{-4} = 81$,

   (d) $(x^3-1)^2 = 1$.

4. V pravokotnem koordinatnem sistemu imamo točko $T(a,0)$, pri čemer je $a \neq 0$. Iz točke $A(0,1)$ narišemo pravokotnico na daljico AT. Presečišče te pravokotnice z abscisno osjo je točka $U(z,0)$. Izračunaj z ter nariši graf funkcije $z(a)$.

5. Poenostavi naslednje izraze:

(a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

(b) $\sqrt[3]{125x^4y^3} : \sqrt[6]{64x^8y^{12}}$,

(c) $(0.75)^{0.25}(0.5)^{0.375}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[8]{18}$,

(d) $(x^{\frac{9}{8}}y^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{3}}z^{\frac{5}{6}} : x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}$,

(e) $\sqrt[8]{x^4}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$,

(f) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}+\frac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^2\sqrt{1+\frac{a}{b}-2\sqrt{\frac{a}{b}}}$.

6. Reši enačbo $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=(\sqrt{2}+1)^2$.

7. Reši enačbo $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=(\sqrt{2}-1)^4$.

8. Poenostavi izraz

$$\left(\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^{-2}$$

do oblike $\frac{a}{b}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{N}$.

9. Obravnavaj enačbi:

(a) $\sqrt{x-1}=a$

(b) $\sqrt{x+2}=\sqrt{a-x}$

10. Ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}$ velja

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}=\sqrt{2}\sqrt{a-1}.$$

11. Dana je funkcija s predpisom $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

(a) Zapiši naravno definicijsko območje funkcije f.

(b) Dokaži, da je f padajoča.

(c) Določi največjo vrednost funkcije f.

12. Dana je funkcija s predpisom $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

(a) Zapiši naravno definicijsko območje funkcije f.

(b) Dokaži, da je f naraščajoča.

(c) Določi najmanjšo vrednost funkcije f.

(d) Koliko rešitev ima enačba $f(x) = 3$?

13. Kolona vozil je dolga 6 km in pelje s stalno hitrostjo v. Policist na motorju se s hitrostjo 60 $\frac{km}{h}$ pelje od konca do začetka kolone, obrne in se z isto hitrostjo pelje do konca kolone. Za vse skupaj potrebuje 12,5 minute. Koliko je v?

14. Določi vsa realna števila a, za katera je enačba

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a$$

rešljiva. Za take a poišči tudi rešitev.

Namig: Izraz pod korenom zapiši kot popolni kvadrat.

Poglavje 8

Polinomi

1. Določi realna števila a, b, c, d in e tako, da bosta polinoma $p(x) = (b-1)x^5 + (c+2)x^4 + 2ex^3 - dx^2 - a + b$ in $q(x) = (a-b-c)x^5 + (b-2a)x^4 + 2dx^3 + 2c - 3$ enaka.

2. Dani so polinomi s predpisi $p_1(x) = x^{100} + x^{99} + x + 1$, $p_2(x) = x^{100} - x^{98} + x^{101} - 2$ in $p_3(x) = x^{100} - x^{55} - 2x$. Določi stopnje polinomov:

   (a) $p_1^2 + p_3^2$,

   (b) $(3p_1 - 2p_2)^2$,

   (c) $(p_1 - p_3)^3$.

3. Dan je polinom $p(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 44x - 30$.

   (a) Med polinomi $q(x) = ap(x)$, $a \in \mathbb{R}$, izberi tistega, ki ima v točki 1 vrednost 12.

   (b) Izračunaj presečišče grafa polinoma $r(x) = -\frac{1}{6}p(x)$ in premice $y = 5x + 5$.

4. Polinom $p(x)$ deli s polinomom $q(x)$. Zapiši dobljeni kvocient $k(x)$ in ostanek $o(x)$. Pri tem velja:

   (a) $p(x) = 22x^6 - 53x^4 - 17x^2 + 30$ in $q(x) = 2x^4 - 5x^2$,

   (b) $p(x) = 5x^7 - 3x^4 + 2x^2 - 3$ in $q(x) = 2x^2 - x + 1$.

5. Pokaži, da sta pri deljenju polinomov kvocient in ostanek enolično določena.

6. Če polinom p deliš z $x-2$ dobiš ostanek 3, če pa ga deliš z $x+3$, dobiš ostanek -7. Kolikšen je ostanek, če p deliš z $(x-2)(x+3)$?

7. Polinom p delimo s polinomom $q(x)=(x-a)(x-b)$, $a\neq b$, in dobimo ostanek $Ax+B$. Izrazi A in B.

8. Dan je polinom $p(x)=x^4-2x^2+1$.

   (a) S katerim polinomom je potrebno deliti polinom p, da pri tem dobimo kvocient x^2-x+1 in ostanek $-3x+3$.

   (b) Poišči vse razcepe polinoma p na produkt dveh polinomov druge stopnje z realnimi koeficienti z vodilnim koeficientom 1.

   (c) Zapiši polinom q, če je $q(x-1)=p(x)$.

9. Če polinom $p(x)=-2x^5+mx^4-8x^3+mx^2-1$ deliš s polinomom druge stopnje $q(x)$, dobiš kvocient $k(x)=-x^3+nx^2-2x+1$ in ostanek $r(x)=nx-2$. Izračunaj m in n ter omenjene polinome.

10. Pri katerih vrednostih realnega števila a je polinom $p(x)=x^4+x^2+a$ deljiv s polinomom $q(x)=x^2+x+a$.

11. Pri katerih vrednostih parametra m je vsota dveh ničel polinoma $p(x)=x^4-8x^3+mx^2-8x-3$ enaka vsoti drugih dveh ničel?

12. Izračunaj b tako, da bo imel polinom $p(x)=x^3-12x+b$ ničlo druge stopnje in zapiši razcep na linearne faktorje.

13. Zapiši ničle, začetno vrednost in skiciraj približen graf polinoma:

    (a) $p(x)=x^5-2x^4-x^3+2x^2$,

    (b) $p(x)=10x^4+2x^3-3x^2+x-4$,

    (c) $p(x)=x^4-4x^2+3$,

    (d) $p(x)=3x^4+4x^3$,

    (e) $p(x)=x^5+x^4-x^3-x^2-2x-2$,

    (f) $p(x)=4x^3+4x^2+3x+1$.

Poglavje 9

Racionalne funkcije

1. Določi ničle, pole, asimptote in načrtaj približne grafe funkcij:

   (a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$,

   (b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$,

   (c) $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x}$,

   (d) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2+1}$,

   (e) $f(x) = \frac{x^4-x^2+1}{x^2}$,

   (f) $f(x) = \frac{-x^4+x^2+2}{x-1}$.

2. Skiciraj grafa funkcij:

   (a) $f(x) = \frac{-|x|+1}{|x|-2}$,

   (b) $f(x) = \left|\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-1}\right|$.

3. Glede na parameter $a \in \mathbb{R}$ obravnavaj rešljivost enačbe

$$\frac{2a-3}{x+a} - 1 = \frac{2-x}{x-1}.$$

4. Glede na parameter m obravnavaj in reši enačbo

$$\frac{m-x^2}{(m-x)^2} = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^3 - mx(2m-x)}.$$

5. Pri katerih vrednostih spremenljivke x graf funkcije $f(x) = \frac{2x^3+x^2-3x-14}{x^3-8}$ leži nad premico z enačbo $y = 2$?

6. Reši neenačbo

$$\frac{x}{x-1} < \frac{x^2+4x+2}{x^3-1}.$$

7. Reši neenačbo

$$\frac{-2x}{x+2} - \frac{3}{2-x} - \frac{1-x}{x} \geq \frac{-2x^3-9x-2}{x^3-4x}.$$

8. Obravnavaj in reši enačbo

$$\frac{1}{2a+ax} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2a+6}{x^3-4x}.$$

9. Določi vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo za vsak $x \in \mathbb{R}$ veljalo

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2.$$

10. Določi parameter $a \in \mathbb{R}$, da bo za vse $x \in \mathbb{R}$ izpolnjena neenakost

$$\left|\frac{x^2+(a+1)x+1}{x^2+x+1}\right| < 3.$$

11. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \left|\frac{x+6}{3-2x}\right|.$$

   (a) Zapiši f brez znakov za absolutno vrednost in skiciraj njen graf.

   (b) Reši neenačbo $f(x) < |3x-2|$.

12. Na parcialne ulomke razcepi izraz:

   (a) $\frac{3x+2}{(x+1)^2(x-1)}$,

   (b) $\frac{1}{x^3-1}$.

Poglavje 10

Limita in zveznost funkcije

1. Po definiciji dokaži, da je $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

2. Izračunaj $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ in resničnost odgovora dokaži s pomočjo definicije.

3. S pomočjo definicije dokaži, da je
$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty.$$

4. Izračunaj $\lim_{x\to \infty} \frac{2x}{x+1}$ in resničnost odgovora dokaži s pomočjo definicije.

5. Izračunaj naslednje limite:

   (a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$,

   (b) $\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x-a}$, $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{1+3x}-1}$,

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$,

   (e) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}^+$,

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$,

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

6. Izračunaj limiti:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}\right) \text{ in } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{3x}.$$

7. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{|x|}, & x<0\\ -3x+1, & x\geq 0.\end{cases}$$

   Določi a tako, da bo f zvezna na celotnem definicijskem območju.

8. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a-x}{x-1}, & x<-1\\ bx-2, & -1\leq x\leq 2\\ \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}, & x>2.\end{cases}$$

   Določi števili a in b tako, da bo f zvezna na celotnem definicijskem območju.

Poglavje 11

Odvod

1. Po definiciji izračunaj odvod funkcije $f(x) = \sqrt{x}$.

2. Izračunaj odvode funkcij:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$,

   (b) $f(x) = \left(5x^{\frac{7}{2}} + \sqrt[5]{4x+1}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$,

   (c) $f(x) = \ln(\sin x)\cos(2x)$,

   (d) $f(x) = x^x$,

   (e) $f(x) = \frac{\arctan x}{\arccos(x^2)}$.

3. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$. Zapiši enačbe vseh tangent na graf funkcije f, ki so vzporedne premici z enačbo $2x + y - 3 = 0$.

4. Podani sta funkciji f in g s predpisoma $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ in $g(x) = ax^2$. Pri katerih vrednostih realnega števila a bo tangenta na graf funkcije f v točki $x = 1$ hkrati tudi tangenta na graf funkcije g?

5. Dana je družina funkcij $f_a(x) = ax^2 + (a-3)x + 2a$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Določi parameter a tako, da bo premica $y = -3x + 5$ tangenta na graf funkcije f_a. Izračunaj tudi dotikališče.

6. Podana je funkcija s predpisom $f(x) = 2\arcsin(\sqrt{1-2x})$. Poišči vsa realna števila x, za katera velja, da je tangenta na f v točki z absciso x vzporedna premici $y + 8x = 5$.

7. Za funkcijo $f(x) = x^3 - 5x^2$ določi intervale naraščanja in padanja ter klasificiraj lokalne ekstreme. Določi tudi območja konveksnosti in konkavnosti!

8. Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ velja $\ln(x+1) < x$.

9. Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $1 + x \leq e^x$.

10. Izmed vseh pravokotnikov, ki jih lahko včrtamo v krog s polmerom r, poišči tistega z največjo ploščino.

11. Iz 9 m žice naredimo model pravilne tristrane prizme z osnovnim robom a in višino v. Izračunajte dolžino osnovnega roba tako, da bo prostornina prizme največja.

12. S pomočjo odvoda skiciraj graf funkcije, podane s predpisom:

    (a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$,

    (b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$,

    (c) $f(x) = (2x^2 - 17)(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Poglavje 12

Kotne in krožne funkcije

1. Dokaži, da je $(\sin x)' = \cos x$.

2. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

   (a) Za katere vrednosti spremenljivke x na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ velja neenakost $f(x) < 0$.

   (b) Pokaži, da je funkcija f periodična in skiciraj njen graf.

3. Poišči osnovno periodo funkcije $f(x) = 2\sin(3x) - 1$.

4. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \cos x - \sin x$.

   (a) Zapis predpisa funkcije f preoblikuj tako, da bo v njem le funkcija sinus.

   (b) Zapiši ničle funkcije f in točke, v katerih funkcija f doseže najmanjšo oziroma največjo vrednost ter nariši njen graf na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

5. Ali je funkcija f, podana s predpisom $f(x) = |\tan(x - \frac{\pi}{2})|$, periodična? Če je, kakšna je njena osnovna perioda?

6. Dan je izraz $A = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin(2x)$.

   (a) Pretvori izraz A v produkt.

   (b) Za katere vrednosti parametra m ima enačba $A = m$ realne rešitve?

   (c) Reši enačbo $A = \sqrt{2}$.

7. Reši enačbe:

(a) $3\cos^2 x - \sin x \cos x = 2$,

(b) $\cos x = 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$,

(c) $\sin^2 x = 2(\sin x \cos x + 1)$,

(d) $\sin x + 2\cos x = 1$,

(e) $\cos x + \cos(7x) + \cos(4x) = 0$,

f) $3\sin x - \sin^2 x = \cos(2x) + 3$,

(g) $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$,

(h) $\frac{1}{2}\cos x - \sin^2 x \cos x = 0$,

(i) $2\cos^2 x + \sin(2x) = 2$,

(j) $\sin(2x) - \cos(\frac{x}{2}) = 0$.

8. Reši neenačbi:

(a) $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0$,

(b) $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2(2x) > \cos(2x)$.

9. Izrazi funkcijo $\arctan x$ s funkcijo arcsin.

10. Naj bo $f(x) = \cos(\arcsin x)$. Izrazi funkcijo f brez krožnih in trigonometričnih funkcij.

11. Skiciraj grafa funkcij:

(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$,

(b) $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

12. Nariši grafa funkcij:

(a) $f(x) = \tan(\arctan(x))$,

(b) $g(x) = \arctan(\tan(x))$.

13. Reši enačbo

$$\arcsin x + \arccos(2x) = \frac{\pi}{6}.$$

Priloga k poglavju 11: Osnovne formule

Navedene formule veljajo za vsa realna števila x, y, kjer so ustrezne funkcije definirane.

1. Osnovne zveze:

   (i) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,,$

   (ii) $\tan x = \frac{1}{\cot x},$

   (iii) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\,,$

   (iv) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$

2. Formule za komplementarne kote:

   (i) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x\,,\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x\,,$

   (ii) $\tan\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cot\ x\,,\ \cot\,(\frac{\pi}{2} - x) = \tan\ x\ \ .$

3. Adicijski izreki:

   (i) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,,$

   (ii) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\,,$

   (iii) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}.$

4. Formule za računanje dvojnih kotov:

   (i) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos y\,,\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$

   (ii) $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$

5. Formule za računanje polovičnih kotov:

   (i) $\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$

   (ii) $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$

   (iii) $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$

6. Formule za pretvarjanje produkta v vsoto:

   (i) $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x + y) - \cos(x - y)),$

   (ii) $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)),$

   (iii) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)).$

7. Formule za pretvarjanje vsote v produkt:

(i) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

(ii) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,

(iii) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

(iv) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Poglavje 13

Eksponentna in logaritemska funkcija

1. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} + 1$.

   (a) Izračunaj presečišča grafa funkcije f z obema koordinatnima osema. Nato dokaži, da je funkcija pozitivna, zapiši enačbo vodoravne asimptote in nariši njen graf.

   (b) Nariši graf funkcije $g : x \mapsto f(|x|)$ in določi zalogo vrednosti te funkcije.

2. Reši neenačbo $3^{x-1} > 5^{x-1}$ in skiciraj graf funkcije $f(x) = 3^{x-1} - 3^{x-2} - 4 \cdot 3^{x-3}$.

3. Graf funkcije $f(x) = ae^{bx}$ poteka skozi točki $A(2, 10)$ in $B(8, 80)$. Izračunaj a in b.

4. Reši enačbi:

   (a) $2^{3x+1} + 2^{2x+1} = 6 \cdot 2^{x+1}$,

   (b) $2^{3-2x} - 9 \cdot 2^{1-x} + 4 = 0$.

5. Reši neenačbe:

   (a) $2^{x^2-5x+10} < 16$,

   (b) $2^{x^2} > \frac{1}{4}(2^x)^3$,

   (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

6. Reši sistem:

(a) $3^{2x} - 2^y = 65$, $3^x + 2^{\frac{y}{2}} = 13$,

(b) $x^2 y = y^x$, $x^3 = y^2$.

7. Dokaži formulo za prehod na novo osnovo logaritma.

8. Določi definicijsko območje funkcije $\sqrt{\log\left(1 - x - x^2\right)}$.

9. Izračunaj in poenostavi:

   (a) $\log_{a+b}\left(10a^3 + 30a^2 b + 30ab^2 + 10b^3\right)$,

   (b) $3\log_8 96 - \frac{1}{\log_3 2}$.

10. Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tako da velja tudi $c + b, c - b, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Dokaži, da je trikotnik s stranicami a, b, c, ki zadoščajo enakosti $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$, pravokoten.

11. Reši enačbe:

    (a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 1 + \frac{1}{3}\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$,

    (b) $8x = x^{\log_8 x^{12}}$,

    (c) $\log(x + 3) + \log(x + 1) = \frac{1}{\log_2 10}$,

    (d) $1 + \log(1 + x^2 - 2x) = \log(1 + x^2) + 2\log(1 - x)$,

    (e) $(\log x)^x = 1$.

12. Graf funkcije $f(x) = -2\log_5 x + 2$ vzporedno premakni tako tako, da se bo točka $T(1, 2)$ preslikala v točko $P(-1, 1)$. Zapiši enačbo dobljene funkcije in nariši njen graf.

13. Določi konstanto n, da bo točka $A(3, y)$ presečišče grafov $y = -\frac{1}{3}x + n$ in $y = \log_2(x + 1) - 1$. Za obe funkciji poišči tudi inverzni funkciji.

14. Nariši grafa funkcij $f(x) = \ln(x)$ in $g(x) = 2 + \ln(x + 3)$. Določi vzporednico osi y, tako da bo sekala grafa v točkah, medsebojno oddaljenih za 3 enote.

15. Ugotovi, ali je f soda oziroma liha:

    (a) $f(x) = \frac{x}{a^x - 1}$

    (b) $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$

    (c) $f(x) = x\frac{a^x - 1}{a^x + 1}$

16. S pomočjo odvoda skiciraj graf funkcije $f(x) = \ln(\cos x)$.

Literatura

[1] D. Grešak, M. Strnad, A. Tiegl, Elementarne funkcije; Kompleksna števila, DZS, Ljubljana, 2001.

[2] D. Kavka, Matematika v srednji šoli, Modrijan založba d.o.o., Ljubljana, 2003.

[3] P. Legiša, Kotne funkcije; Trigonometrija, DZS, Ljubljana, 1999.

[4] P. Legiša, Kompleksna števila; Eksponentna funkcija in logaritem; Merjenje v geometriji, DZS, Ljubljana, 2000.

[5] P. Legiša, Odvod; Integrali, DZS, Ljubljana, 1995.

[6] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[7] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 2, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[8] J. Žerovnik, I. Banič, I. Hrastnik Ladinek, S. Špacapan, Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike, 4. izdaja, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2011.

[9] P. Žigert Pleteršek, M. Črepnjak, Visokošolski učbenik z rešenimi nalogami: Matematika I, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Maribor, 2013.