UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Mateja Grašič, dr. Niko Tratnik

# Zbrano gradivo: vaje pri predmetu Osnove linearne algebre in vektorske analize

Maribor, 2021

# PREDGOVOR

*V tem gradivu so zbrane naloge, ki so primerne za vaje iz predmeta Osnove linearne algebre in vektorske analize na študijskem programu 1. stopnje Fizika. Predstavljene so tudi nekatere osnovne definicije in izreki, ki lahko pomagajo pri reševanju nalog. Na koncu je dodanih nekaj primerov kolokvijev in pisnih izpitov. Pri izbiri nalog sva si pomagala z obstoječimi učbeniki, zbirkami vaj in internetnimi viri (predvsem iz [2] in [15]; na nekaterih mestih je to tudi posebej označeno). Naloge za dodatno reševanje lahko najdemo v zbirkah [4, 5, 6, 7, 8, 11, 12].*

# Kazalo


**1 Logika, množice in funkcije** **1**

**2 Osnovno o vektorjih** **7**

**3 Linearno neodvisni vektorji** **9**

**4 Skalarni, vektorski in mešani produkt** **12**

4.1 Skalarni produkt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

4.2 Vektorski produkt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

4.3 Mešani produkt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

**5 Premice in ravnine v prostoru** **17**

5.1 Premice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

5.2 Ravnine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

**6 Matrike** **21**

6.1 Osnovno o matrikah . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

6.2 Rang matrike . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

6.3 Determinanta . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

6.4 Inverzna matrika . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

6.5 Sistemi linearnih enačb . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

6.6 Determinante in rekurzivne enačbe . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**7 Vektorski prostori** **30**

**8 Linearne preslikave** **32**

**9 Lastne vrednosti in lastni vektorji** **35**

**10 Funkcije več spremenljivk** **37**

10.1 Definicijsko območje, nivojnice in prerezi . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

10.2 Parcialni odvodi in ekstremi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

**11 Gradient, divergenca in rotor** **41**

**12 Primeri kolokvijev in pisnih izpitov** **43**

12.1 Primer prvega kolokvija . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

12.2 Primer drugega kolokvija . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

12.3 Primer pisnega izpita I . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

12.4 Primer pisnega izpita II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

# Poglavje 1

# Logika, množice in funkcije

V tem poglavju so predstavljeni osnovni pojmi iz logike, množic in funkcij. Vsebina poglavja je vzeta iz vira [9].

**Logika**

*Izjava* je neka smiselna poved, za katero lahko določimo, ali je pravilna ali nepravilna. Če je izjava pravilna, ji priredimo logično vrednost 1, če je nepravilna pa vrednost 0. V nadaljevanju bomo izjave označevali z velikimi tiskanimi črkami. Oglejmo si nekaj izjav, ki jih lahko tvorimo iz drugih izjav.

*Negacija* izjave $A$, ki jo označimo kot $\neg A$, je izjava, ki je pravilna, če je izjava $A$ nepravilna in obratno.

*Konjunkcija* izjav $A$ in $B$, ki jo označimo kot $A \wedge B$, je izjava, ki je pravilna samo takrat, ko sta $A$ in $B$ obe pravilni. Izjavo $A \wedge B$ beremo kot $A$ *in* $B$.

*Disjunkcija* izjav $A$ in $B$, ki jo označimo kot $A \vee B$, je izjava, ki je nepravilna samo takrat, ko sta $A$ in $B$ obe nepravilni. Izjavo $A \vee B$ beremo kot $A$ *ali* $B$.

*Implikacija* izjav $A$ in $B$, ki jo označimo kot $A \Rightarrow B$, je izjava, ki je nepravilna samo takrat, ko je $A$ pravilna in $B$ nepravilna. Izjavo $A \Rightarrow B$ beremo kot *iz* $A$ *sledi* $B$ oziroma tudi *če* $A$*, potem* $B$.

*Ekvivalenca* izjav $A$ in $B$, ki jo označimo kot $A \Leftrightarrow B$, je izjava, ki je pravilna samo takrat, ko sta $A$ in $B$ obe pravilni ali obe napravilni. Izjavo $A \Leftrightarrow B$ beremo kot $A$ *natanko tedaj ko* $B$ oziroma tudi $A$ *če in samo če* $B$.

Definicije zgornjih sestavljenih izjav lahko podamo tudi z resničnostno tabelo:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Izjava, ki je zmeraj pravilna (pri vsakem naboru logičnih vrednosti osnovnih izjav), se imenuje *tavtologija*.

**Množice**

*Množica* je nek dobro definiran nabor objektov, ki jih imenujemo tudi *elementi* množice. Množice bomo običajno označevali z velikimi črkami, medtem ko za elemente množic večinoma uporabljamo male črke. Kadar nek element *a pripada* množici $A$, to s simboli zapišemo kot $a \in A$.

Množico lahko podamo tako, da naštejemo vse njene elemente, na primer

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

ali pa tako, da zapišemo pogoje, ki karakterizirajo elemente v množici, na primer

$$A = \{n \,|\, n \text{ je naravno število in } n < 6\}.$$

Pravimo, da je množica $B$ *podmnožica* množice $A$, če velja, da je vsak element iz $B$ tudi element iz $A$. V tem primeru pišemo $B \subseteq A$ ali $B \subset A$. Množici $A$ in $B$ sta *enaki*, $A = B$, če velja $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$.

Množico, ki ne vsebuje nobenega elementa, imenujemo *prazna množica* ali tudi *ničelna množica* in jo označimo kot $\emptyset$ ali $\{\}$. Po drugi strani množico vseh elementov, ki nas v neki situaciji zanimajo, imenujemo *univerzalna množica*.

Kadar neka množica $A$ vsebuje končno mnogo elementov, rečemo, da je $A$ *končna*, število elementov v množici pa imenujemo *moč množice* in ga označimo kot $|A|$.

Pogosto bomo srečevali naslednje številske množice:

- $\mathbb{N}$ - množica naravnih števil,
- $\mathbb{Z}$ - množica celih števil,
- $\mathbb{Q}$ - množica racionalnih števil,

- $\mathbb{R}$ - množica realnih števil,
- $\mathbb{C}$ - množica kompleksnih števil.

**Operacije z množicami**

*Unija* množic $A$ in $B$, ki jo označimo kot $A \cup B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo $A$ ali $B$. Bolj natančno,

$$A \cup B = \{x \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

*Presek* množic $A$ in $B$, ki ga označimo kot $A \cap B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo $A$ in $B$. Bolj natančno,

$$A \cap B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

*Razlika* množic $A$ in $B$, ki jo označimo kot $A \setminus B$ ali $A - B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo $A$ vendar ne pripadajo $B$. Bolj natančno,

$$A \setminus B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Naj bo $\mathcal{U}$ univerzalna množica in $A \subseteq \mathcal{U}$ poljubna množica. *Komplement* množice $A$, ki ga označimo kot $\overline{A}$ ali $A^c$, je množica vseh elementov, ki pripadajo $\mathcal{U}$ vendar ne pripadajo $A$. Bolj natančno,

$$A^c = \overline{A} = \{x \,|\, (x \in \mathcal{U}) \wedge (x \notin A)\}.$$

*Kartezični produkt* množic $A$ in $B$, ki ga označimo kot $A \times B$, je množica vseh urejenih parov elementov, kjer prvi element v paru pripada $A$, drugi element v paru pa pripada $B$. Bolj natančno,

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Za operacije z množicami med drugim veljajo naslednje lastnosti:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,

6. $(A^c)^c = A$,

7. $A \cup A^c = \mathcal{U}$, $A \cap A^c = \emptyset$,

8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (DeMorganova zakona).

**Funkcije**

Naj bosta $A, B$ neprazni množici. *Funkcija* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice $A$ priredi natanko en element množice $B$. Če funkcija $f$ elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, rečemo, da je $b$ *slika* elementa $a$ in pišemo $b = f(a)$. Množico $A$ imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico $B$ pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* funkcije $f$ je definirana kot

$$Z_f = \{f(a) \,|\, a \in A\}.$$

Naj bo $X \subseteq A$. *Slika* množice $X$ je definirana kot

$$f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

Naj bo $Y \subseteq B$. *Praslika* množice $Y$ je definirana kot

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \,|\, f(a) \in Y\}.$$

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : C \to D$ takšni funkciji, da je $B \subseteq C$. Funkcija $g \circ f : A \to D$, ki je definirana s predpisom $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, se imenuje *kompozitum* funkcij $f$ in $g$.

Funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za poljubna elementa $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če za poljuben element $b \in B$ obstaja $a \in A$, tako da velja $b = f(a)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Naj bo $f : A \to B$ bijektivna funkcija. Potem definiramo *inverzno funkcijo* $f^{-1} : B \to A$ na naslednji način: za poljuben $b \in B$ naj bo $a \in A$ tak, da je $f(a) = b$. Potem je $f^{-1}(b) = a$.

**Naloge na vajah:**

1. Naj bodo $A, B, C, D$ izjave. Za vsako izmed naslednjih izjav preveri, da je tavtologija:

    (a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,

    (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (kontrapozicija implikacije),

    (c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (negacija implikacije),

    (d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$,

    (e) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (negacija disjunkcije),

    (f) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (negacija konjunkcije),

    (g) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (distributivnost),

    (h) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (distributivnost).

2. Tone je izjavil: *Če mi bo oče posodil avto, bom prišel pod okno in vrgel kamen.*

    (a) Dano izjavo zapiši s simboli.

    (b) Tone se je zlagal. Kaj se je v resnici zgodilo?

3. Skiciraj podane množice in določi relacije med njimi:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 8\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$.
Izračunaj še $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup (B \cap C)$ in $B \setminus A$.

4. V $\mathbb{R}^2$ skiciraj množici
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$,
$B = \mathbb{Z} \times [-1, 1]$.

5. Naj bo $f$ funkcija, ki vsakemu človeku priredi njegov mesec rojstva. Za funkcijo $f$ zapiši definicijsko območje, zalogo vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.

6. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^2$. Ali je $f$ injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

7. Poišči vsaj eno bijekcijo $f : A \to B$, če je

(a) $A = [1, 3]$ in $B = [2, 5]$,

(b) $A = (0, 1)$ in $B = \mathbb{R}$.

8. Za funkcijo $f$, podano s predpisom $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$, zapiši predpis inverzne funkcije $f^{-1}$.

**Dodatne naloge:**

1. Skiciraj množico
$$A = \Big(\{-1, 1\} \times (-1, 1)\Big) \cup \Big((-1, 1) \times \{-1, 1\}\Big).$$

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Ali je $f$ injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

3. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podani s predpisoma $f(x) = 2^x$ in $g(x) = x - 1$. Določi predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$.

4. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 1$. Določi $f([0, \infty))$, $f^{-1}((1, 3])$ in $f^{-1}((-2, -1))$.

5. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Določi $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}])$.

Opomba: naloge v tem poglavju so iz vira [9].

# Poglavje 2

# Osnovno o vektorjih

Običajno bomo delali v prostoru $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (analogne definicije in rezultati veljajo tudi v ravnini $\mathbb{R}^2$).

*Geometrijski vektor* $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ (v nadaljevanju bomo pisali kar $\overrightarrow{AB}$) je ekvivalenčni razred usmerjenih daljic, ki so vzporedne, enako usmerjene in enako dolge kot usmerjena daljica od točke $A$ do točke $B$. Vektor se torej ohrani, če ga vzporedno premaknemo (gre za isti vektor). Definiramo tudi seštevanje vektorjev in množenje vektorjev s skalarji.

Naj bo $A(a_1, a_2, a_3)$ poljubna točka. *Krajevni vektor* točke $A$ je vektor, ki poteka od izhodišča do točke $A$. Zapišemo ga lahko kot $\overrightarrow{r_A} = (a_1, a_2, a_3)$. Za poljubni točki $A$ in $B$ potem velja

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}.$$

Naj bodo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ poljubni vektorji. Potem vektor

$$\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n},$$

kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, imenujemo *linearna kombinacija* vektorjev $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.

*Dolžina* vektorja $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je definirana kot $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Vektor, katerega dolžina je enaka 1, se imenuje *enotski vektor*.

Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ sta *kolinearna*, če je $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ali če obstaja tako realno število $\lambda$, da je $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$. Rečemo lahko tudi, da sta vektorja vzporedna oziroma da ležita na isti premici.

**Naloge na vajah:**

1. [14] V koordinatnem sistemu imamo podane točke $A(3,4)$, $B(0,-2)$ in $C(-3,2)$.
   (a) Izračunaj dolžino krajevnega vektorja točke $A$.
   (b) Izrazi vektor $\overrightarrow{r_C}$ s pomočjo vektorjev $\overrightarrow{r_A}$ in $\overrightarrow{r_B}$.

2. Naj bodo $A, B, C$ in $D$ poljubne točke iz prostora $\mathbb{R}^3$. Poenostavi izraza:
   (a) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$,
   (b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

3. [14] Podan je kvader $ABCDEFGH$ ter vektorji $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$. Naj bo $M$ razpolovišče daljice $AB$, $N$ pa presečišče diagonal ploskve $BCGF$. S pomočjo vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ izrazi vektorje $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{MN}$. Kaj lahko poveš o vektorjih $\overrightarrow{AG}$ in $\overrightarrow{MN}$?

4. Podana sta vektorja $\overrightarrow{a} = (-x, -3, 8)$ in $\overrightarrow{b} = (2x, 3, 2)$, kjer je $x \in \mathbb{R}$. Ali lahko določiš parameter $x$ tako, da bosta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ kolinearna?

5. [14] Podana je kocka $ABCDEFGH$ ter vektorji $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$. Naj bo $M$ razpolovišče daljice $AB$, $N$ presečišče diagonal ploskve $EFGH$, točka $O$ pa razdeli daljico $CG$ v razmerju $1:2$. S pomočjo vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ izrazi vektorje $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BH}$ - $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{MG}$ in $\overrightarrow{NO}$.

6. [4] Dan je enakokrak trapez s podatki $|BC| = |CD| = |AD| = 2$ in $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Na stranici $AB$ leži enotski vektor $\overrightarrow{m}$, na stranici $AD$ pa enotski vektor $\overrightarrow{n}$. Točka $M$ naj bo razpolovišče daljice $AB$, točka $N$ pa naj deli daljico $CD$ v razmerju $|CN| : |ND| = 2 : 1$.
   (a) Preveri, da je $|AB| = 4$.
   (b) Z vektorjema $\overrightarrow{m}$ in $\overrightarrow{n}$ izrazi vektorje $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN}$ in $\overrightarrow{MN}$.

7. Dan je paralelogram $ABCD$, kjer je $A(-1,0,1)$, $B(2,1,3)$ in $D(0,2,3)$. Določi koordinate točke $C$ ter izračunaj dolžino stranice $AB$ in dolžino diagonale $BD$.

# Poglavje 3

# Linearno neodvisni vektorji

Vektorji $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ so *linearno neodvisni*, če je samo njihova ničelna linearna kombinacija (torej taka, pri kateri so vsi koeficienti enaki 0) enaka ničelnemu vektorju. Z drugimi besedami mora velja naslednje:

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

To pomeni, da se noben izmed danih vektorjev ne da izraziti s preostalimi. Če vektorji niso linearno neodvisni, potem rečemo, da so *linearno odvisni*. V tem primeru se vsaj eden izmed vektorjev da izraziti s preostalimi.

Očitno velja, da sta dva vektorja linearno neodvisna natanko tedaj, ko nista kolinearna (torej nista vzporedna oziroma ne ležita na isti premici). Podobno so trije vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko niso *komplanarni* (torej ne ležijo v isti ravnini).

Vpeljemo tudi vektorje $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ in $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$, ki predstavljajo standardno *bazo* prostora $\mathbb{R}^3$ (to pomeni, da so linearno neodvisni in da se vsak drug vektor lahko na enoličen način zapiše kot linearna kombinacija teh treh vektorjev). Izkaže se, da poljubni trije linearno neodvisni vektorji prostora $\mathbb{R}^3$ sestavljajo bazo tega prostora.

Podobno vsaka dva linearno neodvisna vektorja prostora $\mathbb{R}^2$ sestavljata bazo tega prostora, pri čemer standardno bazo sestavljata vektorja $\overrightarrow{i} = (1,0)$ in $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

**Naloge na vajah:**

1. Dani so vektorji $\overrightarrow{a} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{b} = (1,1,0)$ in $\overrightarrow{c} = (0,1,1)$. Ali so vektorji $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ linearno neodvisni? Če so neodvisni, izrazi vektor $\overrightarrow{v} = (4,-2,-1)$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

2. Dani so vektorji $\overrightarrow{a} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{b} = (3,2,-1)$ in $\overrightarrow{c} = (1,1,0)$. Ali so vektorji $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ linearno neodvisni?

3. Vektor $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ razstavi v smeri vektorjev $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ in $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$. Preveri tudi, da sta vektorja $\overrightarrow{p}$ in $\overrightarrow{q}$ linearno neodvisna.

4. Preveri, ali so vektorji $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ komplanarni?

5. Dani so vektorji $v_1 = (1,-2,3,-4)$, $v_2 = (-1,3,4,2)$ in $v_3 = (1,1,-2,-2)$ iz prostora $\mathbb{R}^4$. Preveri, ali so vektorji linearno neodvisni.

6. [2] Dokaži naslednjo trditev: če so vektorji $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ linearno neodvisni, potem so linearno neodvisni tudi vektorji $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

7. Dokaži, da se v paralelogramu diagonali razpolavljata.

8. [4] Podan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$ ter vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AF}$.

   (a) Vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{FD}$ zapiši kot linearne kombinacije vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

   (b) Izračunaj, v kakšnem razmerju deli daljica $AE$ daljico $FC$.

   (c) Izračunaj, v kakšnem razmerju deli daljica $FC$ daljico $AE$.

9. V trikotniku $ABC$ sta podana vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$.

   (a) Vse tri vektorje, ki ležijo na težiščnicah, izrazi kot linearne kombinacije vektorjev $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

   (b) Dokaži, da težišče razdeli težiščnico v razmerju $1:2$.

10. [2] Podan je paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$. Naj bo točka $E$ presečišče diagonal ploskve $BCC'B'$. V kakšnem razmerju razdeli paralelogram $BB'D'D$ daljico $AE$?

11. [2] Podan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$ in $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ ter $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AF}$.

(a) Vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FC}$ izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

(b) V kakšnem razmerju deli diagonala $BD$ diagonalo $AC$?

12. [2] Naj bo $ABCDA'B'C'D'$ paralelepiped. Dokaži, da njegova telesna diagonala $AC'$ prebada ravnino, ki jo določajo točke $B$, $A'$ in $D$, v težišču trikotnika $BA'D$.

13. [2] Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ določata trikotnik. V kakšnem razmerju simetrala kota, ki ga določata $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, razdeli nasprotno stranico?

# Poglavje 4

# Skalarni, vektorski in mešani produkt

## 4.1 Skalarni produkt

Za vektorja $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je *skalarni produkt* definiran kot

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Očitno lahko dolžino (normo) vektorja $\overrightarrow{a}$ izračunamo kot

$$|\overrightarrow{a}| = ||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}.$$

Velja naslednja formula:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos\varphi,$$

kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$. Torej sta neničelna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ pravokotna natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

Naj bo $x$ predznačna dolžina pravokotne projekcije vektorja $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$. Potem je

$$x = |\overrightarrow{b}| \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}.$$

Vektor $\overrightarrow{c}$, ki je pravokotna projekcija vektorja $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$, se torej izraža kot

$$\overrightarrow{c} = \frac{x}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}\overrightarrow{a}.$$

**Naloge na vajah:**

1. Podana sta vektorja $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Izračunaj njuni dolžini, njun skalarni produkt in kot med njima.

2. Podana sta vektorja $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ in $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$, pri čemer sta $\overrightarrow{p}$ in $\overrightarrow{q}$ enotska vektorja, ki oklepata kot $60°$. Izračunaj kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, dolžino projekcije vektorja $\overrightarrow{a}$ na vektor $\overrightarrow{b}$ in ploščino paralelograma, napetega na vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

3. [12] Vektorja $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{q} = 5\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ sta pravokotna. Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ imata enako dolžino. Določi kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

4. [15] Za katere vrednosti realnega števila $t$ oklepata vektorja $\overrightarrow{a} = (t, t+5, \sqrt{3})$ in $\overrightarrow{b} = (1, 0, 0)$ kot $\frac{\pi}{3}$.

5. Izračunaj dolžine stranic in notranje kote trikotnika $ABC$, če velja $A(3,1,1)$, $B(4,3,3)$ in $C(1,2,4)$. Določi tudi dolžino težiščnice skozi točko $B$.

6. [2] Kolikšen kot tvori telesna diagonala kocke z osnovno ploskvijo kocke in kolikšen z osnovno stranico kocke?

## 4.2 Vektorski produkt

*Vektorski produkt* vsakemu paru vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ priredi vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, ki je definiran kot

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}.$$

Izkaže se, da za vse vektorje $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$,
- $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$,
- $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$,
- za vektorje $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ velja: $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ in $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

Geometrijski pomen:

- vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je pravokoten na $\overrightarrow{a}$ in na $\overrightarrow{b}$,
- vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ sta kolinearna natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$,
- $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$, kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema (norma vektorskega produkta torej predstavlja ploščino paralelograma, ki ga določata vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$),
- smer vektorja $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je določena po pravilu desnega vijaka pri zasuku $\overrightarrow{a}$ v $\overrightarrow{b}$ po najkrajši poti.

Še nekaj identitet:

- $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|^2 + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 = |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$,
- $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$,
- $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ (Jacobijeva identiteta),
- $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})$ (Lagrangeova identiteta).

**Naloge na vajah:**

1. Dana sta vektorja $\overrightarrow{a} = (1, 2, 2)$ in $\overrightarrow{b} = (-2, 1, 3)$. Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ ter ploščino paralelograma, ki ga okelpata ta dva vektorja.
2. Izračunaj ploščino trikotnika, podanega z oglišči $A(2, 2, 4)$, $B(4, 2, 7)$ in $C(3, 0, 3)$.
3. Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga določata vektorja $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{q} = 4\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, če je $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 2$, kot med $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ pa je $\frac{5\pi}{6}$.
4. Poenostavi izraz $\overrightarrow{i} \times (2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + \overrightarrow{j} \times (-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}) + \overrightarrow{k} \times (2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k})$.

5. [2] Izračunaj $(((\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) \times \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{k}$.

6. [2] Paralerogram določata diagonali $\overrightarrow{e} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$. Izračunaj ploščino paralerograma.

7. [2] Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna vektorja. Reši vektorsko enačbo
$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x})(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}.$$

8. Dokaži, da velja $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin\varphi$, kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$. Namig: pomagaj s prvo izmed zapisanih identitet.

Opomba: nekatere naloge v tem razdelku so prirejene po viru [15].

## 4.3 Mešani produkt

*Mešani produkt* vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ je definiran kot
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}.$$
Če imajo vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ običajen zapis po komponentah, potem velja
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Izkaže se, da je absolutna vrednost mešanega produkta $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ enaka prostornini paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$.

Še nekaj lastnosti:

- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ natanko tedaj, ko so vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ komplanarni,
- mešani produkt je linearen po vsaki komponenti,
- če v mešanem produktu med seboj zamenjamo dva vektorja, se spremeni predznak mešanega produkta.

**Naloge na vajah:**

1. Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 2)$ in $\vec{c} = (1, 1, -2)$. Določi še volumen piramide, ki jo določajo ti trije vektorji.

2. Preveri, ali točke $A(1, 2, 9)$, $B(-2, 3, 20)$, $C(-1, 1, 13)$ in $D(2, 2, 2)$ pripadajo isti ravnini.

3. Določi parameter $x \in \mathbb{R}$ tako, da bodo vektorji $\vec{a} = (3x, -1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2x, 2)$ in $\vec{c} = (x, 1, -2)$ komplanarni.

4. Tristrana piramida je podana z oglišči: $A(1, 1, 0)$, $B(4, 0, 2)$, $C(5, 3, 2)$ in $D(2, 2, -2)$. Izračunaj prostornino piramide in dolžino višine skozi oglišče $C$.

5. [2] Naj bo $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 1$. Izračunaj $(2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}, 3\vec{c} + 4\vec{a})$.

6. [15] Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ določajo tristrano piramido s prostornino 3. Kolikšna je prostornina piramide, ki jo določajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$?

Opomba: nekatere naloge v tem razdelku so prirejene po viru [15].

# Poglavje 5

# Premice in ravnine v prostoru

## 5.1 Premice

Premica $p$ je določena s točko $A(x_0, y_0, z_0)$ in smernim vektorjem $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, p_3)$. *Vektorska enačba* premice je tako

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_A} + t\overrightarrow{p}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer je $\overrightarrow{r}$ krajevni vektor poljubne točke $T(x, y, z)$ na premici. Enačbo lahko zapišemo tudi v *parametrični obliki*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_1 \\ y &= y_0 + tp_2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + tp_3 \end{aligned}$$

ali v *kanonični obliki*

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}.$$

V zadnjem primeru smo predpostavili, da so vse komponente vektorja $\overrightarrow{p}$ različne od 0.

Očitno sta dve premici vzporedni natanko tedaj, ko sta njuna smerna vektorja kolinearna. Kot med dvema premicama, ki se sekata, določimo s pomočjo kota med njunima smernima vektorjema.

Razdaljo točke $T$ do premice $p$, ki je podana s točko $A$ in s smernim vektorjem $\overrightarrow{p}$, izračunamo s pomočjo formule

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{AT}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Naj bosta $p$ in $q$ dve mimobežni premici (torej taki, ki se ne sekata in ki nista vzporedni). Razdaljo med premicama, ki sta podani s točkama $P$ in $Q$ ter s smernima vektorjema $\overrightarrow{p}$ in $\overrightarrow{q}$, izračunamo kot

$$d(p,q) = \frac{|(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{PQ})|}{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}|}.$$

**Naloge na vajah:**

1. Zapiši enačbo premice $p$, ki poteka skozi točki $A(1,0,-1)$ in $B(1,2,3)$ v vseh treh oblikah. Ali točka $C(1,1,1)$ leži na premici $p$?

2. Podana je premica $p$ z enačbo $\frac{x-1}{3} = -\frac{y}{2} = z$. Premico $p$ zapiši v parametrični obliki.

3. Zapiši enačbo premice $p$, ki je pravokotna na vektorja $\overrightarrow{v}_1 = (2,2,1)$ in $\overrightarrow{v}_2 = (3,-1,1)$ ter gre skozi točko $A(1,2,1)$. Ali točka $B(1,-1,-1)$ leži na tej premici? Če ne, izračunaj razdaljo točke $B$ do premice $p$.

4. [2] Izračunaj presečišče premic:

$$\begin{aligned} p:&\quad x = 1+2t\,,\quad y = -1+3t\,,\quad z = -6t\,,\quad t \in \mathbb{R}\,;\\ q:&\quad x = -3+2s\,,\quad y = -1+s\,,\quad z = -2s\,,\quad s \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   Zapiši tudi enačbi simetral kotov med premicama $p$ in $q$.

5. [2] Dani sta premici $p : x = y - 1$, $z = 2$ in $q : x + 1 = 2y + 2 = 2z$. Izračunaj razdaljo med premicama $p$ in $q$.

## 5.2 Ravnine

Ravnina je določena s točko $A(x_0, y_0, z_0)$ in dvema nekolinearnima vektorjema $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ki ležita v tej ravnini. *Vektorska enačba* ravnine je tako

$$\vec{r} = \vec{r_A} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke $T(x, y, z)$ na ravnini. Enačbo lahko zapišemo tudi v *parametrični obliki*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1 + sb_1 \\ y &= y_0 + ta_2 + sb_2, \quad t, s \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + ta_3 + sb_3 \end{aligned}$$

Po drugi strani je ravnina določena tudi z *normalnim vektorjem* $\vec{n} = (a, b, c)$ (ki je pravokoten na ravnino) in točko $A(x_0, y_0, z_0)$. Tako dobimo še *splošno* ali *normalno* obliko enačbe ravnine

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Razdaljo točke $T(x_1, y_1, z_1)$ do ravnine $\pi$, ki je podana z zgornjo enačbo, izračunamo s pomočjo formule

$$d(T, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Naloge na vajah:**

1. Zapiši enačbo ravnine $\pi$, ki vsebuje premici $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{5}$ in $q : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5}$. Ali točka $C(1, 2, 3)$ leži v tej ravnini? Če ne, izračunaj razdaljo točke $C$ do ravnine $\pi$.

2. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točki $A(2, 0, 4)$ in $B(1, 4, 3)$ ter je pravokotna na ravnino $\pi : x - y + z = 1$.

3. [2] Določi presek ravnini $\pi : 2x + 3y - z = -1$ in $\Sigma : x - y + z = 8$. Pod kakšnim kotom se sekata ti dve ravnini?

4. Izračunaj točko, v kateri premica $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{5}$ seka ravnino $\pi : -2x + y + 3z = 17$.

5. Katera točka na ravnini $\pi : 2x + 3y - z = 5$ leži najbližje točki $T(7, 9, -6)$?

6. [2] Med točkami, ki so enako oddaljene od točk $A(3, 4, 1)$ in $B(-1, 0, 5)$ poišči tisto, ki je najbližje točki $C(6, 5, -4)$.

7. [2] Poišči pravokotno projekcijo premice $p : x = 2y = z$ na ravnino $\pi : x+y-z = 1$. Pod kakšnim kotom premica $p$ seka ravnino $\pi$?

8. Prezrcali točko $A(-10, 2, -2)$ čez premico $p : -x - 1 = \frac{z-13}{4}, y = 3$.

9. [15] Podani sta ravnini $\pi_1 : 12x + 9y - 20z = 19$ in $\pi_2 : 16x - 12y + 15z = 9$. Poišči vse točke, ki ležijo na osi $z$ in so enako oddaljene od obeh ravnin.

Opomba: nekatere naloge v tem razdelku so prirejene po viru [15].

# Poglavje 6

# Matrike

## 6.1 Osnovno o matrikah

*Realna matrika* dimenzije $m \times n$ je pravokotna tabela števil

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

kjer je $a_{ij} \in \mathbb{R}$ za vse $i \in \{1, \ldots, m\}$ in $j \in \{1, \ldots, n\}$. V tem primeru ima matrika $A$ $m$ vrstic in $n$ stolpcev. Krajše lahko matriko zapišemo tudi kot $A = [a_{ij}]$, množico vseh realnih $m \times n$ matrik pa označimo z $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. V posebnem primeru, ko je $m = n$, je $A$ *kvadratna matrika*, množico vseh $n \times n$ matrik pa označimo z $M_n(\mathbb{R})$. *Identiteta* $I \in M_n(\mathbb{R})$ je matrika, za katero je vsak diagonalni element enak 1, vsi ostali elementi pa so enaki 0.

Za matrike definiramo naslednje operacije (za več informacij glej [1]):

1. seštevanje matrik: za $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ je $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,
2. množenje matrike s skalarjem: za $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,
3. množenje matrik: za $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ in $B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ je $AB \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$,
4. transponiranje matrik: za $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ je $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

**Naloge na vajah:**

1. [2] Podane so realne matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj matrike, ki obstajajo: $A+B$, $AB$, $BA$, $AC$, $C^TC$, $CC^T$, $2A+D^T$, $C^TD$, $DAB$.

2. [15] Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Poišči matriko $X$, za katero velja $2A - 3X = B$.

3. [2] Za naravno število $n$ izračunaj $A^n$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. [15] Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. [2] Matrika $A$ je simetrična, če je $A^T = A$ in je poševno simetrična, če je $A^T = -A$.

   (a) Zapiši splošna primera realne $3 \times 3$ simetrične in poševno simetrične matrike.

   (b) Kakšne so naslednje matrike: $A + A^T$, $A - A^T$, $A^TA$?

## 6.2 Rang matrike

*Rang* matrike $A$, ki ga označimo kot rang $A$, je enak številu linearno neodvisnih vrstic matrike $A$ (formalno rang definiramo kot dimenzijo linearne lupine vseh vrstic matrike). Za izračun ranga matrike bomo potrebovali naslednje tri elementarne vrstične operacije:

($v1$) $i$-to vrstico matrike $A$ pomnožimo z neničelnim skalarjem $\lambda$,

($v2$) $i$-to vrstico matrike $A$, pomnoženo z $\lambda$, prištejemo k $j$-ti vrstici ($j \neq i$),

($v3$) zamenjamo $i$-to in $j$-to vrstico matrike $A$.

Izkaže se, da navedene vrstične operacije ne spremenijo ranga matrike [1]. S pomočjo teh operacij lahko matriko preoblikujemo v takšno obliko, da velja:

1. če je neka vrstica ničelna, potem so ničelne tudi vse naslednje vrstice,
2. če je vrstica $i+1$ neničelna, potem je prvi neničelni element z leve v tej vrstici bolj desno kot prvi neničelni element v $i$-ti vrstici.

Za matriko opisane oblike je rang očitno enak kar številu neničelnih vrstic.

**Naloge na vajah:**

1. [15] Določi ranga matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & 11 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 7 \\ -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}.$$

2. [15] Glede na parameter $k$ določi ranga matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & k & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

## 6.3 Determinanta

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Determinanto* matrike $A$ označimo kot $\det A$ in definiramo s formulo

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)},$$

pri čemer je $S_n$ množica vseh permutacij množice $\{1, \ldots, n\}$ in $s(\pi)$ predznak permutacije $\pi$ [1]. Izkaže se, da je $\det A^T = \det A$ in $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ za $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Determinanto lahko izračunamo s pomočjo razvoja po $i$-ti vrstici, $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

kjer je $A_{ij}$ podmatrika matrike $A$, v kateri odstranimo $i$-to vrstico in $j$-ti stolpec. Podobna formula velja tudi za razvoj po poljubnem stolpcu.

Determinanto lahko izračunamo tudi s pomočjo Gaussove metode, pri čemer upoštevamo naslednje lastnosti vrstičnih operacij:

1. če $i$-to vrstico matrike $A$ pomnožimo s skalarjem $\lambda$, se determinanta matrike pomnoži z $\lambda$,
2. če $i$-to vrstico matrike $A$, pomnoženo z $\lambda$, prištejemo k $j$-ti vrstici ($j \neq i$), se determinanta matrike ne spremeni,
3. zamenjava dveh vrstic matrike spremeni predznak determinante.

S temi operacijami lahko problem računanja determinante prevedemo na računanje determinante zgornje trikotne matrike, ki pa je enaka kar produktu diagonalnih elementov.

**Naloge na vajah:**

1. Permutacijo
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
zapiši kot produkt transpozicij in določi njen predznak.

2. [2, 15] S pomočjo razvoja po vrstici ali stolpcu izračunaj determinanti

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. [2, 15] S pomočjo Gaussove eliminacije izračunaj determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

   Drugo determinanto izračunaj še s kombinacijo metod iz naloge 1 in 2.

4. [2] Izračunaj determinanto reda $n \times n$

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -t \end{vmatrix}.$$

## 6.4 Inverzna matrika

Matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je *obrnljiva*, če obstaja taka matrika $B \in M_n(\mathbb{R})$, da velja

$$AB = BA = I.$$

V tem primeru pravimo, da je $B$ *inverzna matrika* matrike $A$ in označimo $B = A^{-1}$.

Izkaže se, da so za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ naslednje trditve ekvivalentne [1]:

$(i)$ $A$ je obrnljiva matrika,

$(ii)$ rang matrike $A$ je enak $n$,

(*iii*) $\det A \neq 0$.

*Postopek iskanja inverzne matrike:* matriko $A$ razširimo z identiteto $I$, da dobimo matriko $[A|I]$, nato z elementarnimi vrstičnimi operacijami $(v1) - (v3)$ prevedemo matriko $[A|I]$ do matrike $[I|A^{-1}]$.

Inverzno matriko obrnljive matrike $A$ lahko izračunamo tudi po formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\tilde{A}\right)^T,$$

pri čemer je $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ in $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ za $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Matriko $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ imenujemo *prirejenka matrike* $A$ ali tudi *matrika kofaktorjev.*

**Naloge na vajah:**

1. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Z matriko kofaktorjev izračunaj inverzno matriko $A^{-1}$.

   (b) Reši matrično enačbo $AX = B^T$.

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) [15] S pomočjo Gaussove eliminacije izračunaj inverz matrike $A$.

   (b) Reši matrično enačbo $AX - I = B$.

3. Preveri, ali je matrika $A$ obrnljiva, če je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & 5 & -7 \\ -4 & -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. [2] Reši matrično enačbo $AXB = C$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. [2] Reši matrično enačbo $2AX - 3A = BX$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -4 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Izračunaj inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 6.5 Sistemi linearnih enačb

Sistem $m$ linearnih enačb z $n$ neznankami lahko zapišemo v matrični obliki kot $Ax = b$ oziroma s pomočjo razširjene matrike $[A|b]$ (pri tem je $A$ matrika dimenzije $m \times n$, $x$ je stolpec $n$ neznank in $b$ stolpec z $m$ elementi). Nato si pomagamo z elementarnimi vrstičnimi operacijami $(v1) - (v3)$, ki ne spremenijo rešitev sistema. Natančneje, matriko $[A|b]$ preoblikujemo tako kot v razdelku 6.2 in izpišemo rešitve sistema.

Izkaže se, da je sistem linearnih enačb $Ax = b$ rešljiv natanko tedaj, ko je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b]$. Nadalje, če je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = n$, je sistem enolično rešljiv, če je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = k < n$, ima sistem $n - k$ parametrično družino rešitev [1].

**Naloge na vajah:**

1. Reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 11z &= 1, \\ x + 2y - 4z &= 0, \\ x + 4y - 3z &= 9. \end{aligned}$$

2. Reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}4x - 5y + 7z &= 3,\\ x - 2y + 3z &= 1,\\ 2x - y + z &= 4.\end{aligned}$$

3. [15] Reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}x + y + 2z + 3u - v &= 5,\\ x + 2y + z + 5u - v &= 5,\\ -x + y - 4z + 2u &= -3,\\ 2x - y + 7z - 2u &= 6,\end{aligned}$$

4. [15] Glede na parameter $k$ obravnavaj rešljivost sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned}x - y + z &= 0,\\ 3x - y - z &= -2,\\ 4x - y - 2z &= k.\end{aligned}$$

5. [15] Glede na parameter $k$ obravnavaj rešljivost sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned}kx + 2y + 3z &= 4,\\ 2x + y - z &= 3,\\ 3x + 3y + 2z &= 10.\end{aligned}$$

## 6.6 Determinante in rekurzivne enačbe

Naj bo dana rekurzivna enačba $c_2a_{n+2} + c_1a_{n+1} + c_0a_n = 0$, kjer je $(a_n)$ iskano realno zaporedje in $c_2, c_1, c_0$ realne konstante $(c_0, c_2 \neq 0)$. Tej enačbi določimo karakteristično enačbo $c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$. Naj bosta $\lambda_1$ in $\lambda_2$ rešitvi karakteristične enačbe. Ločimo dve možnosti:

1. če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, potem je rešitev rekurzivne enačbe oblike $a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$,

2. če je $\lambda_1 = \lambda_2$, potem je rešitev rekurzivne enačbe oblike $a_n = A_1\lambda_1^n + A_2 n\lambda_1^n$.

Konstanti $A_1$ in $A_2$ določimo iz podanih začetnih členov zaporedja. Podoben postopek lahko uporabimo tudi za rekurzivne enačbe višjih redov.

**Naloge na vajah:**

1. Poišči splošna člena zaporedij, ki sta podani rekurzivno:

   (a) $a_0 = 4$, $a_1 = 7$ in $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$,

   (b) $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ in $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

2. [2] S pomočjo rekurzivne formule izračunaj $n \times n$ determinanto

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

# Poglavje 7

# Vektorski prostori

Naj bo $V$ neprazna množica, na kateri sta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarji (ki so elementi polja $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Potem je $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor* nad $\mathbb{F}$, če je za omenjeni operaciji izpolnjenih 8 lastnosti [1]. Elementom množice $V$ pravimo *vektorji*, elementom množice $\mathbb{F}$ pa *skalarji*. Neprazna množica $U \subseteq V$ je *vektorski podprostor* v $V$, če velja:

$(i)$ za vse $x, y \in U$ je tudi $x + y \in U$,

$(ii)$ za vsak $x \in U$ in vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ je tudi $\lambda x \in U$.

Če je $M \subseteq V$ neprazna podmnožica, potem je *linearna lupina* množice $M$, ki jo označimo z $\mathcal{L}(M)$, enaka množici vseh (končnih) linearnih kombinacij vektorjev iz $M$. Nadalje, množica $M$ je *linearno neodvisna*, če je vsaka njena končna podmnožica linearno neodvisna. Dogovorimo se, da je prazna množica linearno neodvisna in da velja $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$.

Naj bo $V$ vektorski prostor. Potem je $\mathcal{B} \subseteq V$ *baza* prostora $V$, če je $\mathcal{B}$ ogrodje za $V$ (torej $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$) in je $\mathcal{B}$ tudi linearno neodvisna množica. Izkaže se, da imajo vse baze nekega končno dimenzionalnega vektorskega prostora enako moč, število elementov v bazi pa se imenuje *dimenzija* vektorskega prostora (oznaka $\dim V$).

**Naloge na vajah:**

1. Ugotovi, katere od množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$:

   (a) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$,

(b) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$,

(c) $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$,

(d) $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{3} = -y = 2z\}$.

2. Ali je množica $\mathcal{B} = \{(1, -1, 2), (2, 3, 1), (4, 1, 5)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$?

3. [15] Ali je množica $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$? Če je, zapiši vektor $(6, 9, 14)$ kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$.

4. Zapiši kakšno bazo prostorov $U_2$ in $U_4$ iz naloge 1.

5. Ugotovi, katere množice so vektorski podprostori od $\mathbb{R}[x]$ in zapiši kak primer baze teh podprostorov.

   (a) $U_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$,

   (b) $U_2 = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}_n[x] \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1\}$,

   (c) $U_3 = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p'(0) = 0\}$,

   (d) $U_4 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(0) = 0\}$.

6. Ali so polinomi $p_1(x) = 2x^2 - x + 7$, $p_2(x) = x^2 + 4x + 2$ in $p_3(x) = x^2 - 2x + 4$ linearno neodvisni?

7. Sestavi kakšno bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$, ki vsebuje polinom

   (a) $p_1(x) = 2$.

   (b) $p_2(x) = -2x$.

   (c) $p_3(x) = x - 4$.

   (d) $p_4(x) = x^2 - 4$.

8. Poišči koordinatni vektor polinoma $p(x) = 4 - 2x + 3x^2$ glede na bazo $\mathcal{B} = \{2, -4x, 5x^2 - 1\}$.

9. Katere od podanih množic so podprostori prostora $M_3(\mathbb{R})$:

   (a) $U_1 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$,

   (b) $U_2 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$,

   (c) $U_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$?

# Poglavje 8

# Linearne preslikave

Naj bosta $U$ in $V$ vektorska prostora nad $\mathbb{F}$. Preslikava $\mathcal{A} : U \to V$ je *linearna preslikava*, če velja:

$(i)$ $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ za vse $x, y \in U$,

$(ii)$ $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$ za vsak $x \in U$ in vsak $\lambda \in \mathbb{F}$.

*Jedro* linearne preslikave $\mathcal{A}$ je množica $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$.

*Slika* linearne preslikave $\mathcal{A}$ je množica $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{\mathcal{A}(u) \mid u \in U\}$.

Izkaže se, da je $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ vektorski podprostor v $U$, $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ pa vektorski podprostor v $V$. Znana je tudi naslednja formula (kjer je $U$ končno dimenzionalen vektorski prostor):

$$\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A}) + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = \dim U.$$

Sedaj predpostavimo, da sta $U$ in $V$ končno dimenzionalna vektorska prostora. Naj bosta $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ in $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ urejeni bazi prostorov $U$ in $V$. Za vsak $j \in \{1, \ldots, n\}$ zapišemo $\mathcal{A}(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m$ za neke skalarje $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Matrika

$$\mathcal{A}[\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se imenuje *matrika linearne preslikave* glede na urejeni bazi $\mathcal{B}_U$ in $\mathcal{B}_V$.

Naj bosta $\mathcal{B}_U$ in $\mathcal{B}'_U$ urejeni bazi prostora $U$ ter $\mathcal{I} : U \to U$ identična preslikava. Matrika $\mathcal{I}[\mathcal{B}'_U, \mathcal{B}_U]$ se imenuje *matrika prehoda*, označimo jo tudi kot $P[\mathcal{B}'_U, \mathcal{B}_U]$. Izkaže se, da je $P[\mathcal{B}_U, \mathcal{B}'_U] = (P[\mathcal{B}'_U, \mathcal{B}_U])^{-1}$.

Če sta $\mathcal{B}_U$ in $\mathcal{B}'_U$ urejeni bazi prostora $U$, $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}'_V$ pa urejeni bazi prostora $V$, potem velja

$$\mathcal{A}[\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_U] = P[\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}_V]\, \mathcal{A}[\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U]\, P[\mathcal{B}_U, \mathcal{B}'_U].$$

**Naloge na vajah:**

1. [10] Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - 2y - z \\ x - y + z \\ -x + y \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

   (b) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

   (c) Določi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ ter zapiši primera njunih baz.

2. [10] Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ glede na standardni bazi prostorov pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zapiši eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$.

   (b) Poišči bazo jedra in bazo slike preslikave $\mathcal{A}$.

3. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p''(0) & p'(0) \\ p(0) & p'(0) + p(0) \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

   (b) Določi $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A})$ in $\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A})$ ter zapiši primera njunih baz.

   (c) Zapiši matriko linearne preslikave $\mathcal{A}$ glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}_2[x]$ in $M_2(\mathbb{R})$.

4. [10] Podani so vektorji $\overrightarrow{a} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{b} = (1,1,0)$ in $\overrightarrow{c} = (0,0,1)$. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki vektor $\overrightarrow{a}$ preslika v $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, vektor $\overrightarrow{b}$ preslika v $2\overrightarrow{a}$, vektor $\overrightarrow{c}$ pa v $\overrightarrow{c}$.

   (a) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

   (b) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na standardno bazo $\mathcal{B}_S$ prostora $\mathbb{R}^3$, torej $\mathcal{A}[\mathcal{B}_S, \mathcal{B}_S]$.

5. [10] Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj predstavlja zrcaljenje čez ravnino $\Pi : x - y - z = 0$. Zapiši eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$.

6. [2] Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj predstavlja zasuk prostora $\mathbb{R}^3$ za kot $\frac{\pi}{3}$ v pozitivni smeri okoli osi $y$. Naj bo še $\mathcal{B} = \{(1,0,2),(1,1,4),(0,1,3)\}$ urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$. Zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathcal{B}$, torej $\mathcal{A}[\mathcal{B},\mathcal{B}]$.

# Poglavje 9

# Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naj bo $\mathcal{A} : U \to U$ linearna preslikava (endomorfizem). Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je *lastna vrednost* linearne preslikave $\mathcal{A}$, če obstaja tak neničelni vektor $x \in U$, da velja $\mathcal{A}(x) = \lambda x$. V tem primeru je $x$ *lastni vektor* za lastno vrednost $\lambda$, množica $V_\lambda = \{x \in U \mid \mathcal{A}(x) = \lambda x\}$ pa *lastni podprostor* za lastno vrednost $\lambda$. Na podoben način definiramo tudi lastno vrednost, lastni vektor in lastni podprostor matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Naj bo $U$ končno dimenzionalen vektorski prostor z bazo $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A} : U \to U$ linearna preslikava. Naj bo še $A$ matrika, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\mathcal{B}$. Potem so lastne vrednosti linearne preslikave $\mathcal{A}$ natanko ničle *karakterističnega polinoma* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

**Naloge na vajah:**

1. [10] Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na standardni bazi pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj vse lastne vrednosti linearne preslikave $\mathcal{A}$ in zapiši pripradajoče lastne podprostore. Ali je matrika $A$ diagonalizabilna? Če je, poišči diagonalno matriko $D$ in tako matriko $P$, da velja $A = PDP^{-1}$.

2. Podana je linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki standardne bazne vektorje zaporedoma preslika v vektorje $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$ in $u_3 = (4, -1, -1)$.

   (a) Zapiši matriko $A$, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah.

(b) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje linearne preslikave $\mathcal{A}$.

(c) Če je matrika $A$ diagonalizabilna, poišči diagonalno matriko $D$ in tako matriko $P$, da velja $A = PDP^{-1}$.

3. [10] Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A$. Ali je matrika $A$ podobna kakšni diagonalni matriki?

# Poglavje 10

# Funkcije več spremenljivk

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Poljubni funkciji $f : D \to \mathbb{R}$ pravimo *funkcija $n$ spremenljivk*.

## 10.1 Definicijsko območje, nivojnice in prerezi

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk in $a \in \mathbb{R}$. Množici

$$N_a = \{(x, y) \in D \,|\, f(x, y) = a\}$$

pravimo *nivojnica na višini $a$*.

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk, $y = kx + n$ enačba premice, $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x, kx + n) \in D\}$ in $g : A \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $g(x) = f(x, kx + n)$ za vsak $x \in A$. Grafu funkcije $g$ pravimo *prerez* grafa funkcije $f$ nad premico $y = kx + n$.

**Naloge na vajah:**

1. Poišči naravna definicijska območja naslednjih funkcij:

   (a) $f(x, y) = 7 - 3x + 5y$,

   (b) $f(x, y) = \dfrac{y}{y - 4x}$,

   (c) $f(x, y) = \dfrac{x}{25y^2 - 4x^2}$,

   (d) $f(x, y) = \dfrac{xy - 4}{3\sqrt{y - x^2}}$.

2. [15] Poišči naravno definicijsko območje funkcije $f(x, y) = \ln(x+y)+\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

3. Nariši nekaj nivojnic in kakšen primer prereza funkcije:

   (a) $f(x, y) = xy$,

   (b) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Podana je funkcija $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije $f$.

   (b) Skiciraj nivojnice $N_1$, $N_4$, $N_{\frac{1}{4}}$, $N_a$, $a \in \mathbb{R}^+$, in prerez nad premico $y = 0$.

   (c) Ali lahko razširimo definicijsko območje tako, da bo funkcija $f$ zvezna na območju $\mathbb{R}^2$?

5. Skiciraj graf funkcije $f(x, y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$.

Opomba: nekatere naloge v tem razdelku so prirejene po virih [3, 15].

## 10.2 Parcialni odvodi in ekstremi

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk. *Parcialni odvod funkcije $f$ po spremenljivki $x$* v točki $(a, b)$ je definiran kot

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Podobno je *parcialni odvod funkcije $f$ po spremenljivki $y$* v točki $(a, b)$ definiran kot

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

*Računanje približkov funkcijskih vrednosti s pomočjo diferenciala:* naj bo funkcija dveh spremenljivk $f : D \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva na neki okolici točke $(a, b) \in D$ in naj bosta parcialna odvoda zvezna v točki $(a, b)$. Potem za majhne $h, k$ (ki so blizu 0) velja

$$f(a + h, b + k) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k.$$

*Iskanje lokalnih ekstremov za funkcijo dveh spremenljivk $f : D \to \mathbb{R}$:* najprej poiščemo *stacionarne točke* (to so točke $(a, b) \in D$, za katere je $f_x(a, b) = 0$ in $f_y(a, b) = 0$), nato za vsako stacionarno točko $(a, b)$ (za katero ima funkcija $f$ v okolici točke $(a, b)$ zvezne parcialne odvode do vključno reda 3) definiramo števila $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$ in $C = f_{yy}(a, b)$. Ločimo možnosti:

1. Če je $AC - B^2 > 0$, tedaj ima funkcija $f$ v točki $(a, b)$ lokalni ekstrem. Če je $A > 0$, gre za lokalni minimum, če je $A < 0$ pa za lokalni maksimum.
2. Če je $AC - B^2 < 0$, tedaj funkcija $f$ v točki $(a, b)$ nima lokalnega ekstrema.
3. Če je $AC - B^2 = 0$, tedaj o lokalnem ekstremu funkcije $f$ v točki $(a, b)$ odločajo parcialni odvodi višjih redov.

*Iskanje vezanih ekstremov*: kandidati za ekstreme funkcije $n$ spremenljivk $f$, pri čemer so spremenljivke $x_1, \ldots, x_n$ povezane z enačbo $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, so:

1. Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $n + 1$ spremenljivk $F$, ki je definirana kot $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$.
2. Točke $(x_1, \ldots, x_n)$, za katere je $g_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$.

*Iskanje globalnih ekstremov:* globalne ekstreme zvezne funkcije $f$ na nekem zaprtem in omejenem območju (na primer na krogu $x^2 + y^2 \leq 1$) poiščemo po naslednjem postopku:

1. Poiščemo kandidate za *lokalne ekstreme* funkcije $f$, pri tem upoštevamo samo tiste, ki ležijo v danem območju.
2. Poiščemo kandidate za *vezane ekstreme* funkcije $f$ na robu območja (v našem primeru je vez krožnica $x^2 + y^2 = 1$).
3. Nato izračunamo vrednosti funkcije $f$ v vseh točkah, ki smo jih dobili, in ugotovimo, kje funkcija doseže največjo oziroma najmanjšo vrednost.

**Naloge na vajah:**

1. Izračunaj parcialne odvode prvega reda za naslednje funkcije:
   (a) $f(x, y) = x^3 + 8xy^2 - y^6$,
   (b) $f(x, y) = y \sin(xy)$,

(c) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

2. [15] Izračunaj parcialne odvode prvega in drugega reda za funkcijo $f(x,y) = \ln(x^2+y)$.

3. Določi realno število $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija $f(x,y) = x^3 + axy^2$ zadoščala enačbi $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$.

4. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$.

5. [3] Podana je funkcija $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}\right)$.

   (a) Poišči in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije $f$.

   (b) Poišči stacionarne točke funkcije $f$.

6. Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = 7 - x^2 - y^2$.

7. Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x - 3y^2 + 4$.

8. [15] Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = e^{2y}(x^2+2x+y)$.

9. Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

10. [15] Poišči ekstreme funkcije $f(x,y) = x + 2y$ na krožnici $x^2 + y^2 = 5$.

11. Zgraditi želimo odprti bazen v obliki kvadra s prostornino $V$. Kakšne naj bodo njegove dimenzije, da bo površina (brez zgornjega dela) najmanjša?
    *Opomba: nalogo lahko rešiš s pomočjo lokalnega ekstrema ali vezanega ekstrema.*

12. [15] Na ploskvi z enačbo $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$ poišči točke, ki so najbolj oziroma najmanj oddaljene od ravnine $z = 0$.

# Poglavje 11

# Gradient, divergenca in rotor

Funkciji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarna funkcija* ali *skalarno polje*, funkciji $\overrightarrow{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa *vektorska funkcija* ali *vektorsko polje* (pri tem so $f, g, h$ skalarne funkcije). Vpeljemo tudi operator *nabla*: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Naj bo $f$ parcialno odvedljiva skalarna funkcija. Potem je *gradient* funkcije $f$, $\text{grad}(f)$, vektorska funkcija, definirana s predpisom

$$\text{grad}(f) = \nabla f = (f_x, f_y, f_z).$$

Naj bo $\overrightarrow{F} = (f, g, h)$ vektorska funkcija, kjer so $f, g, h$ parcialno odvedljive skalarne funkcije. Potem je *divergenca* funkcije $\overrightarrow{F}$, $\text{div}(\overrightarrow{F})$, skalarna funkcija, definirana s predpisom

$$\text{div}(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = f_x + g_y + h_z.$$

Nadalje, *rotor* funkcije $\overrightarrow{F}$, $\text{rot}(\overrightarrow{F})$, je vektorska funkcija, definirana s predpisom

$$\text{rot}(\overrightarrow{F}) = \nabla \times \overrightarrow{F} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y).$$

**Naloge na vajah:**

1. Dano je skalarno polje $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

   (a) Izračunaj gradient skalarnega polja $u$ v točki $T(2, 1, 1)$.

   (b) Poišči vse točke, v katerih je gradient vzporeden ravnini $z = 0$.

2. Podano je vektorsko polje $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$. Izračunaj $\mathrm{div}(\overrightarrow{F})$ in $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F})$.

3. Dano je vektorsko polje $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (6xy + z^3)\overrightarrow{i} + (3x^2 - z)\overrightarrow{j} + (3xz^2 - y)\overrightarrow{k}$. Pokaži, da je polje $\overrightarrow{F}$ nevrtinčno.

4. Naj bo $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno parcialno odvedljivo skalarno polje. Pokaži, da je
$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, u) = (0, 0, 0).$$

5. Podano je vektorsko polje $\overrightarrow{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in skalarno polje $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
$$\overrightarrow{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \quad \text{in} \quad v(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$
Izračunaj $\mathrm{div}(\overrightarrow{E})$ in $\mathrm{grad}(v)$ ter komentiraj rezultate.

# Poglavje 12

# Primeri kolokvijev in pisnih izpitov

## 12.1 Primer prvega kolokvija

1. **[25]** V paralelogramu $ABCD$ leži točka $E$ na daljici $AB$ tako, da je $|AE| : |EB| = 4 : 1$, točka $F$ na daljici $CD$ tako, da je $|CF| : |FD| = 2 : 1$, točka $S$ pa je presečišče daljic $BD$ in $EF$. Naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

   (a) Vektorje $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$ in $\overrightarrow{EF}$ zapiši kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) Izračunaj, v kakšnem razmerju deli točka $S$ daljico $BD$.

2. **[25]** Oglišča tristrane piramide so $A(1, 2, 0)$, $B(3, 4, -1)$, $C(1, 2, 2)$ in $V(0, a, 3)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Če je volumen piramide enak 2, izračunaj parameter $a$ (upoštevaj vse možnosti). Pri tako določenem parametru $a$ izračunaj še višino piramide.

3. **[25]** Dane so točke $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 4, 4)$, $C(3, -4, 0)$ in $D(2, -3, 0)$.

   (a) Zapiši enačbo premice $p$, ki poteka skozi točki $A$ in $B$. Ali so točke $A, B, C$ kolinearne?

   (b) Zapiši enačbo ravnine $\Pi$, ki vsebuje premico $p$ in točko $D$.

   (c) Zapiši enačbo premice $q$, ki leži v ravnini $\Pi$, poteka skozi točko $D$ in je pravokotna na premico $p$. Skica je obvezna.

4. [**25**] Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo

$$BX = AB - 2AX.$$

Čas reševanja je **120 minut.**

## 12.2 Primer drugega kolokvija

1. **[30]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 3y - 3z, 4x + 9y - 6z).$$

   (a) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na urejeno standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Za preslikavo $\mathcal{A}$ poišči bazo jedra in bazo slike.

   (c) Dana je urejena baza $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathcal{B}$, torej $\mathcal{A}[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$.

2. **[25]** Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Izračunaj lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A$.

   (b) Ali je matrika $A$ diagonalizabilna? Če je, potem poišči taki matriki $D$ in $P$, da bo $D$ diagonalna matrika in $D = P^{-1}AP$. Vse odgovore utemelji.

3. **[25]** Funkcija dveh spremenljivk je podana s predpisom $f(x, y) = \sqrt{(x-1)y}$.

   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije $f$ in ga skiciraj v ravnini. Nariši tudi nivojnici $N_0$ in $N_2$.

   (b) S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost funkcije $f$ v točki $(4.99, 1.02)$.

4. **[20]** Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme (če obstajajo) funkcije dveh spremenljivk

$$f(x, y) = -3 \ln x + xy^2 - 2y^3.$$

Čas reševanja je **120 minut.**

## 12.3 Primer pisnega izpita I

1. **[25]** Ravnina $\Pi$ poteka skozi koordinatno izhodišče ter vsebuje točki $A(2, 2, 4)$ in $B(4, 0, 2)$. Ravnina $\Sigma$ vsebuje vse točke, ki so enako oddaljene od točk $A$ in $B$. Premica $p$ je presek ravnin $\Pi$ in $\Sigma$, premica $q$ pa poteka skozi točko $A$ in je vzporedna vektorju $\overrightarrow{q} = (2, 0, 1)$. Zapiši enačbi ravnin $\Pi$ in $\Sigma$, enačbi premic $p$ in $q$ ter izračunaj presečišče premic $p$ in $q$.

2. **[25]** Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na urejeno bazo $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ pripada matrika
$$\mathcal{A}[\mathcal{B}, \mathcal{B}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Izračunaj matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na urejeno standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$, torej $\mathcal{A}[\mathcal{B}_S, \mathcal{B}_S]$.
   (b) Za preslikavo $\mathcal{A}$ poišči bazo jedra in bazo slike glede na standardno bazo.

3. **[25]** Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Izračunaj lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A$.
   (b) Ali je matrika $A$ diagonalizabilna? Če je, potem poišči taki matriki $D$ in $P$, da bo $D$ diagonalna matrika in $D = P^{-1}AP$. Vse odgovore utemelji.

4. **[25]** Funkcija dveh spremenljivk je podana s predpisom $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$.
   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije $f$ in ga skiciraj v ravnini. Nariši tudi nivojnici $N_0$ in $N_2$.
   (b) S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost funkcije $f$ v točki $(5.02, 8.99)$.

Čas reševanja je **120 minut.**

## 12.4 Primer pisnega izpita II

1. **[25]** Podan je trapez $ABCD$, v katerem je stranica $AB$ vzporedna stranici $CD$ in je $|AB| = 2|CD|$. Točka $E$ leži na daljici $BC$ tako, da je $|BE| : |EC| = 2 : 1$, točka $S$ pa je presečišče daljic $AE$ in $BD$. Naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

   (a) Vektorje $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{AE}$ zapiši kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) Izračunaj, v kakšnem razmerju deli točka $S$ daljico $AE$, torej $|AS| : |SE|$. Odgovor utemelji.

2. **[25]** Podani sta premici $p : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = 1 - z$ in $q : x = -3,\ y + 11 = \frac{8-z}{2}$ ter ravnina $\Sigma : 2x + 3y - z = 4$. Ravnina $\pi$ vsebuje premici $p$ in $q$.

   (a) Izračunaj presečišče premic $p$ in $q$ ter zapiši enačbo ravnine $\pi$.

   (b) Zapiši enačbo premice $r$, ki je presek ravnin $\pi$ in $\Sigma$. Izračunaj tudi kot med ravninama $\pi$ in $\Sigma$.

3. **[30]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x - 5y + 8z,\ x - 3y + 5z,\ -x + 4y - 7z).$$

   (a) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na urejeno standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Za preslikavo $\mathcal{A}$ poišči bazo jedra in bazo slike ter določi dimenziji jedra in slike.

   (c) Dana je urejena baza $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, -1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathcal{B}$, torej $\mathcal{A}[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$.

4. **[20]** Poišči in klasificiraj vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$, kjer je vez podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Čas reševanja je **120 minut.**

Opomba: nekatere naloge v tem poglavju so prirejene po virih [13, 15].

# Literatura

[1] D. Benkovič, Vektorji in matrike, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2014.

[2] D. Benkovič, Algebra I, Zbrano gradivo: naloge na vajah, kolokviji in pisni izpiti, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2010 (dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/index.php/zaposleni/clani-oddelka/dominik-benkovic/` dne 7. 7. 2021).

[3] D. Benkovič, Analiza II, Zbrano gradivo: naloge na vajah, kolokviji in pisni izpiti, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2010.

[4] M. Črepnjak, Študijsko gradivo pri predmetu Matrični račun, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019 (dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2017/06/Vaje-Matricni_racunv_pripravi-1.pdf` dne 16. 8. 2021).

[5] M. Dobovišek, Rešene naloge iz analize II, DMFA, Ljubljana, 2014.

[6] M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič, Rešene naloge iz analize I, DMFA, Ljubljana, 1992.

[7] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna, Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana, 2016.

[8] B. Hvala, Zbirka izpitnih nalog iz analize, DMFA, Ljubljana, 2007.

[9] M. Jakovac, N. Tratnik, Zbrano gradivo: vaje iz elementarnih funkcij, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019 (dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2019/01/ef_gradivo_vaje-1.pdf` dne 16. 8. 2021).

[10] D. Kokol Bukovšek, Algebra 1, študijsko gradivo za študente prvega letnika finančne matematike, samozaložba, Ljubljana, 2011.

[11] M. Kolar, B. Zgrablić, Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pedagoška fakulteta, Ljubljana, 2004.

[12] E. Kramar, Rešene naloge iz linearne algebre, DMFA, Ljubljana, 2020.

[13] P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja (del 2), Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1991.

[14] M. Mlakar, Vektorji - naloge, dosegljivo na naslovu `http://matej.info/data/Arhiv/2013/vektorji_naloge.pdf` dne 16. 8. 2021.

[15] A. Perne, Zbirka rešenih nalog iz Matematike II, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2013 (dosegljivo na naslovu `http://matematika.fe.uni-lj.si/html/people/perne/gradiva/skripta-mat2.pdf` dne 7. 7. 2021).