UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Matevž Črepnjak, dr. Niko Tratnik

Zbrano gradivo: vaje pri predmetu Številske množice in zaporedja

Maribor, 2022

PREDGOVOR

V tem gradivu so zbrane naloge, ki se uporabljajo na vajah pri predmetu Števílske množice in zaporedja v 1. letniku enopredmetnega univerzitetnega študijskega programa Matematika. Naloge so sistematično urejene po poglavjih, prav tako so dodani nekateri osnovni teoretični pojmi, ki so potrebni za reševanje. V vsakem razdelku so vključene tudi naloge, ki jih na vajah ne uspemo rešiti in lahko zato služijo kot naloge za samostojno reševanje. Na koncu sva dodala primere kolokvijev oziroma pisnih izpitov. Več nalog za samostojno reševanje najdemo v virih [1, 2, 3, 6].
Nekatere izmed nalog so originalne, veliko pa jih je prirejenih ali povzetih iz raznih učbenikov, zbirk in drugih internetnih virov. Pri pripravi gradiva sva uporabila tudi naloge, ki so se pred spremembo programa uporabljale za vaje iz Analize I. Zato se zahvaljujeva dr. Danielu Eremiti in dr. Marku Jakovcu, ki sta v preteklosti vodila vaje pri omenjenem predmetu. Prav tako se zahvaljujeva dr. Boštjanu Brešarju, ki je prispeval nekatere izmed domačih nalog.

Kazalo

Poglavje 1

Logika in množice

V tem poglavju so predstavljeni osnovni pojmi iz logike, množic in funkcij. Vsebina poglavja je večinoma vzeta iz vira [4].

Logika

Izjava je neka smiselna poved, za katero lahko določimo, ali je pravilna ali nepravilna. Če je izjava pravilna, ji priredimo logično vrednost 1, če je nepravilna pa vrednost 0. V nadaljevanju bomo izjave označevali z velikimi tiskanimi črkami. Oglejmo si nekaj izjav, ki jih lahko tvorimo iz drugih izjav.

Negacija izjave A, ki jo označimo kot $\neg A$, je izjava, ki je pravilna, če je izjava A nepravilna in obratno.

Konjunkcija izjav A in B, ki jo označimo kot $A \wedge B$, je izjava, ki je pravilna samo takrat, ko sta A in B obe pravilni. Izjavo $A \wedge B$ beremo kot A *in* B.

Disjunkcija izjav A in B, ki jo označimo kot $A \vee B$, je izjava, ki je nepravilna samo takrat, ko sta A in B obe nepravilni. Izjavo $A \vee B$ beremo kot A *ali* B.

Implikacija izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Rightarrow B$, je izjava, ki je nepravilna samo takrat, ko je A pravilna in B nepravilna. Izjavo $A \Rightarrow B$ beremo kot *iz* A *sledi* B oziroma tudi *če* A*, potem* B.

Ekvivalenca izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Leftrightarrow B$, je izjava, ki je pravilna samo takrat, ko sta A in B obe pravilni ali obe napravilni. Izjavo $A \Leftrightarrow B$ beremo kot A *natanko tedaj ko* B oziroma tudi A *če in samo če* B.

Definicije zgornjih sestavljenih izjav lahko podamo tudi z resničnostno tabelo:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Izjava, ki je zmeraj pravilna (pri vsakem naboru logičnih vrednosti osnovnih izjav), se imenuje *tavtologija*.

Množice

Množica je nek dobro definiran nabor objektov, ki jih imenujemo tudi *elementi* množice. Množice bomo običajno označevali z velikimi črkami, medtem ko za elemente množic večinoma uporabljamo male črke. Kadar nek element a *pripada* množici A, to s simboli zapišemo kot $a \in A$.

Množico lahko podamo tako, da naštejemo vse njene elemente, na primer

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

ali pa tako, da zapišemo pogoje, ki karakterizirajo elemente v množici, na primer

$$A = \{n \,|\, n \text{ je naravno število in } n < 6\}.$$

Pravimo, da je množica B *podmnožica* množice A, če velja, da je vsak element iz B tudi element iz A. V tem primeru pišemo $B \subseteq A$ ali $B \subset A$. Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, če velja $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$.

Množico, ki ne vsebuje nobenega elementa, imenujemo *prazna množica* ali tudi *ničelna množica* in jo označimo kot $\emptyset$ ali $\{\}$. Po drugi strani množico vseh elementov, ki nas v neki situaciji zanimajo, imenujemo *univerzalna množica*.

Kadar neka množica A vsebuje končno mnogo elementov, rečemo, da je A *končna*, število elementov v množici pa imenujemo *moč množice* in ga označimo kot $|A|$.

Pogosto bomo srečevali naslednje številske množice:

- $\mathbb{N}$ - množica naravnih števil,
- $\mathbb{Z}$ - množica celih števil,
- $\mathbb{Q}$ - množica racionalnih števil,

- $\mathbb{R}$ - množica realnih števil,
- $\mathbb{C}$ - množica kompleksnih števil.

Operacije z množicami

Unija množic A in B, ki jo označimo kot $A \cup B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo A ali B. Bolj natančno,

$$A \cup B = \{x \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Presek množic A in B, ki ga označimo kot $A \cap B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo A in B. Bolj natančno,

$$A \cap B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Razlika množic A in B, ki jo označimo kot $A \backslash B$ ali $A - B$, je množica vseh elementov, ki pripadajo A vendar ne pripadajo B. Bolj natančno,

$$A \setminus B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Naj bo $\mathcal{U}$ univerzalna množica in $A \subseteq \mathcal{U}$ poljubna množica. *Komplement* množice A, ki ga označimo kot $\overline{A}$ ali A^c, je množica vseh elementov, ki pripadajo $\mathcal{U}$ vendar ne pripadajo A. Bolj natančno,

$$A^c = \overline{A} = \{x \,|\, (x \in \mathcal{U}) \wedge (x \notin A)\}.$$

Kartezični produkt množic A in B, ki ga označimo kot $A \times B$, je množica vseh urejenih parov elementov, kjer prvi element v paru pripada A, drugi element v paru pa pripada B. Bolj natančno,

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Za operacije z množicami med drugim veljajo naslednje lastnosti:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,

6. $(A^c)^c = A$,

7. $A \cup A^c = \mathcal{U}$, $A \cap A^c = \emptyset$,

8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (DeMorganova zakona).

Naloge:

1. Naj bodo A, B, C, D izjave. Za vsako izmed naslednjih izjav preveri, ali je tavtologija:
   (a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,
   (b) $A \wedge A \Leftrightarrow A$,
   (c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (kontrapozicija implikacije),
   (č) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (negacija implikacije),
   (d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$,
   (e) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (negacija disjunkcije),
   (f) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (negacija konjunkcije),
   (g) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (distributivnost),
   (h) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (distributivnost).

2. Dana je izjava: *Če kobilice napadejo Maribor, postanejo vsi Mariborčani lačni.* Ugotovi, v katerih primerih je dana izjava resnična oziroma neresnična.

3. Tone je izjavil: *Če mi bo oče posodil avto, bom prišel pod okno in vrgel kamen.*
   (a) Dano izjavo zapiši s simboli.
   (b) Tone se je zlagal. Kaj se je v resnici zgodilo?

4. Dane so naslednje izjave:
   A: če je nekaj slepo, potem je to človeška ribica,
   B: če je nekaj človeška ribica, potem je to slepo,
   C: če nekaj ni slepo, potem to ni človeška ribica,
   D: če nekaj ni človeška ribica, potem to ni slepo,
   X: vse človeške ribice so slepe.
   Ugotovi, katera izmed izjav A, B, C in D je ekvivalentna izjavi X.

5. Dane so naslednje izjave:
   A: noben avto ni BMW,
   B: niso vsi avti BMW,
   C: vsaj en avto ni BMW,
   D: vsaj en avto je Mercedes,
   X: $\neg$(vsi avti so BMW).
   Ugotovi, katera izmed izjav A, B, C in D je ekvivalentna izjavi X.

6. Skiciraj podane množice in določi relacije med njimi:
   $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 8\}$,
   $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$.

7. Skiciraj množico

$$A = \Big(\mathbb{Z} \times [-1, 1]\Big) \cap \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\Big\}.$$

8. Skiciraj množico

$$A = \Big(\{-1, 1\} \times (-1, 1)\Big) \cup \Big((-1, 1) \times \{-1, 1\}\Big).$$

9. Skiciraj podane množice in določi relacije med njimi:
   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$,
   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. V ravnini je podan pravokotnik z oglišči $A(-1, -2)$, $B(3, y_2)$, $C(x_3, 2)$ in $D(x_4, y_4)$. Stranica AB je vzporedna z osjo x.

    (a) Zapiši neznane koordinate in nariši pravokotnik.

    (b) Zapiši pogoj za točke na nosilkah stranic AB in CD.

11. V ravnini je dan pozitivno orientiran kvadrat z dolžino stranice 4 enote in ogliščem $A(-3, -1)$. Stranica AB naj bo vzporedna osi x.

    (a) Nariši kvadrat in določi koordinate oglišč.

    (b) Izračunaj dolžino diagonale.

    (c) Nariši diagonali in določi koordinati presečišča diagonal.

12. Naj bosta A in B poljubni množici. Ali velja enakost

$$A = B \setminus (B \setminus A)?$$

Enakost dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

13. Podane so množice $U = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$, $B = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\} \times \mathbb{R}$ in $C = \big(-1, 1\big) \times \big(-1, 1\big)$. Skiciraj množice A, B in C ter zapiši množice $A \cap B, B \cap C, U \setminus A$.

Opomba: naloge v tem poglavju so večinoma povzete po viru [4].

Poglavje 2

Funkcije

V tem poglavju spoznamo osnovne pojme o funkcijah, vsebina poglavja pa je vzeta iz vira [4].

Naj bosta A, B neprazni množici. *Funkcija* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko en element množice B. Če funkcija f elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, rečemo, da je b *slika* elementa a in pišemo $b = f(a)$. Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico B pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* funkcije f je definirana kot

$$Z_f = \{f(a) \,|\, a \in A\}.$$

Naj bo $X \subseteq A$. *Slika* množice X je definirana kot

$$f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

Naj bo $Y \subseteq B$. *Praslika* množice Y je definirana kot

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \,|\, f(a) \in Y\}.$$

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : C \to D$ takšni funkciji, da je $B \subseteq C$. Funkcija $g \circ f : A \to D$, ki je definirana s predpisom $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, se imenuje *kompozitum* funkcij f in g.

Funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za poljubna elementa $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če za poljuben element $b \in B$ obstaja $a \in A$, tako da velja $b = f(a)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Naj bo $f : A \to B$ bijektivna funkcija. Potem definiramo *inverzno funkcijo* $f^{-1} : B \to A$ na naslednji način: za poljuben $b \in B$ naj bo $a \in A$ tak, da je $f(a) = b$. Potem je $f^{-1}(b) = a$.

Naloge:

1. Naj bo f funkcija, ki vsakemu človeku priredi njegov mesec rojstva. Za funkcijo f zapiši definicijsko območje, primer zaloge vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^4$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.

4. Naj bo $A = [1, 3]$ in $B = [2, 5]$. Poišči vsaj eno bijekcijo $f : A \to B$ in dokaži, da je res bijekcija.

5. Naj bo $A = (0, 1)$ in $B = \mathbb{R}$. Poišči vsaj tri različne bijekcije $f : A \to B$.

6. Določi podmnožici realnih števil A in B tako, da bo funkcija $f : A \to B$, podana s predpisom $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$, bijektivna. Zapiši tudi predpis inverzne funkcije f^{-1}.

7. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ je sod} \\ 3n + 1, & n \text{ je lih.} \end{cases}$$

   Ali je funkcija f injektivna oziroma surjektivna?

8. Podana je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ s predpisom $f(a) = \sqrt{(a-1)^2}$.

   (a) Skiciraj graf funkcije f.

(b) Ugotovi, ali je funkcija f injektivna ali surjektivna.

(c) Če f ni bijektivna, ustrezno spremeni domeno, da bo.

9. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 1$. Določi $f([0, \infty))$, $f^{-1}((1, 3])$ in $f^{-1}((-2, -1))$.

10. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = \cos x$. Določi $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}])$.

11. Naj bo $A = (0, 1) \times \mathbb{Z}$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x, k) = x + k$.

    (a) Določi $f(A)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$ in $f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$.

    (b) Dokaži, da je f injektivna.

12. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podani s predpisoma $f(x) = 2^x$ in $g(x) = x - 1$. Določi predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$. Ali sta ti dve funkciji bijektivni? Če sta, to tudi dokaži.

13. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

    Zapiši predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$ ter nariši grafe vseh štirih funkcij.

14. Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ 3 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1. \end{cases}$$

    Zapiši predpisa funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$.

15. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če sta funkciji f in g injektivni, potem je $g \circ f$ injektivna.

16. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ funkciji. Dokaži: če sta funkciji f in g surjektivni, potem je $g \circ f$ surjektivna.

17. Naj bosta $f : B \to C$ in $g : A \to B$ funkciji ter naj bo $f \circ g : A \to C$ njun kompozitum.

(a) Dokaži: če je funkcija $f \circ g$ surjektivna, potem je f surjektivna.

(b) Naj velja $A = B = C = \mathbb{R}$. Poišči taki funkciji f in g, da bo f surjektivna, $f \circ g$ pa ne.

18. Naj bo $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ funkcija s predpisom $F(n, m) = n - m$.

    (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna.

    (b) Določi množico $F^{-1}\big(\{-2, 2\}\big)$ in jo skiciraj v $\mathbb{R}^2$.

19. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2$. Ali je f injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno tako, da bo dobljena funkcija bijektivna. Vse odgovore utemelji.

20. Podana je preslikava

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty) \\ &F : (x, y) \mapsto x^2 + y^2. \end{aligned}$$

    (a) Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.

    (b) Zapiši in skiciraj množici $F^{-1}(\{4\})$ ter $F^{-1}([1, 9])$.

    (c) Ali je funkcija F, zožena na množico $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \land y \geq 0\}$ injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.

21. Naj bo K kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ in K' kvadrat $(0, 1] \times (0, 1]$. Dokaži ali ovrzi:

    (a) Obstaja bijekcija med K in $[2, 4] \times [1, 6]$.

    (b) Obstaja bijekcija med K' in $[1, \infty) \times [1, \infty)$.

    (c) Obstaja bijekcija med K in $(0, 1) \times (0, 1)$.

Opomba: naloge v tem poglavju so večinoma povzete po virih [4, 5].

Poglavje 3

Realna števila

3.1 Matematična indukcija

Matematično indukcijo običajno uporabimo takrat, ko želimo neko trditev pokazati za vsa naravna števila.

Naj bo $\mathcal{P}(n)$ neka trditev, ki je smiselna za vsako naravno število n. Če velja

1. $\mathcal{P}(1)$ je resnična trditev in
2. za vsak $n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$,

potem je $\mathcal{P}(n)$ resnična trditev za vsa naravna števila n.

Naloge:

1. Naj bo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$. Dokaži, da za vsako naravno število n velja:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

2. Dokaži, da se število 2^{2^n} konča s števko 6 za vsako naravno število $n \geq 2$.

3. Dokaži, da za poljubno naravno število n velja

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3.2 Aksiomi za realna števila

Predpostavimo, da imamo množico števil M, na kateri sta vpeljani notranji operaciji seštevanja in množenja. Zapišimo aksiome za realna števila:

1. *Asociativnost seštevanja:* Za poljubna števila $a, b, c \in M$ velja $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. *Komutativnost seštevanja:* Za poljubni števili $a, b \in M$ velja $a+b = b+a$.

3. *Obstoj enote za seštevanje:* Obstaja nevtralni element (*enota za seštevanje*) v množici M, ki ga označimo z 0. To pomeni, da je $a+0 = a$ za vsako število $a \in M$.

4. *Obstoj nasprotnega števila:* Za vsako število $a \in M$ obstaja njemu *nasprotno število* $-a \in M$, za katerega velja $a+(-a) = 0$.

5. *Asociativnost množenja:* Za poljubna števila $a, b, c \in M$ velja $(ab)c = a(bc)$.

6. *Komutativnost množenja:* Za poljubni števili $a, b \in M$ velja $ab = ba$.

7. *Enota za množenje:* V M obstaja *enota za množenje*, ki jo označimo z 1. To pomeni, da je $a \cdot 1 = a$ za vsako število $a \in M$.

8. *Obstoj inverznega števila:* Za vsako število $a \neq 0$, $a \in M$, obstaja njegov *inverz* $a^{-1} \in M$, tako da je $aa^{-1} = 1$.

9. $0 \neq 1$.

10. *Distributivnost:* Za poljubna števila $a, b, c \in M$ velja $(a+b)c = ac+bc$.

11. Če je število $a \neq 0$, je natanko eno od števil a in $-a$ *pozitivno* (število 0 ni niti pozitivno niti negativno).

12. Vsota in produkt dveh pozitivnih števil sta pozitivni števili (pozitivna števila so zaprta za seštevanje in množenje).

13. *Dedekindov aksiom:* Vsaka neprazna navzgor omejena množica števil ima natančno zgornjo mejo (supremum).

Spoznajmo še nekaj definicij:

- Za poljubni števili a in b definiramo odštevanje kot $a - b = a + (-b)$.
- Število a je *večje* kot b, $a > b$, če je $a - b$ pozitivno število. V tem primeru rečemo tudi, da je število b *manjše* kot a in pišemo $b < a$.
- Če je $a \neq 0$ in a ni pozitivno število, potem je a *negativno število*.

Naloge:

1. Dokaži, da za dano realno število a obstaja natanko eno nasprotno število.
2. Pokaži, da velja pravilo krajšanja: za vsa realna števila a, x, y velja $a + x = a + y \Rightarrow x = y$.
3. Dokaži, da je $-0 = 0$.
4. Dokaži, da za poljubni realni števili a, b velja:
   (a) $a \cdot 0 = 0$,
   (b) $(-a)b = -ab$,
   (c) $-(-a) = 0$,
   (d) $(-a)(-b) = ab$.
5. Dokaži, da za poljubno realno število a velja $|a|^2 = a^2$.
6. Pokaži, da za poljubna realna števila a, b, c velja:
   (a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$,
   (b) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$,
   (c) $a > b$ in $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
7. Naj bosta $a, b > 0$ realni števili. Dokaži, da je $a < b$ natanko tedaj, ko je $a^2 < b^2$.
8. Dokaži naslednji trditvi:
   (a) Realno število a je pozitivno natanko tedaj, ko je število $-a$ negativno.
   (b) Za realni števili a, b velja $a < b$ natanko tedaj, ko je $a - b$ negativno število.
9. Pokaži, da za poljubni realni števili a in b velja:

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

(b) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

10. Ugotovi, ali sta naslednji operaciji na množici realnih števil asociativni oz. komutativni:

    (a) $a * b = a + (-b)$ (odštevanje realnih števil),

    (b) $a * b = a + b - ab$.

3.3 Supremum in infimum

V nadaljevanju zapišimo nekaj definicij iz [4]. Naj bo A neka neprazna podmnožica realnih števil. Rečemo, da je A *navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da velja $a \leq M$ za vsak $a \in A$. Vsako tako število M imenujemo *zgornja meja* množice A. Podobno je A *navzdol omejena*, če obstaja tako realno število m, da velja $a \geq m$ za vsak $a \in A$. Vsako tako število m imenujemo *spodnja meja* množice A. Množica A je *omejena*, če je navzgor omejena in navzdol omejena.

Zlahka vidimo, da ima navzgor omejena množica neskončno mnogo zgornjih mej, podobno pa velja tudi za navzdol omejeno množico. Zato sta smiselni naslednji definiciji.

Realno število M je *supremum* množice A, če velja:

1. M je zgornja meja množice A,
2. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, tako da je $a > M - \varepsilon$.

V takem primeru pišemo $M = \sup A$, število M pa imenujemo tudi *najmanjša zgornja meja* ali *natančna zgornja meja.* V kolikor velja še $M \in A$, je M *maksimum* množice A.

Realno število m je *infimum* množice A, če velja:

1. m je spodnja meja množice A,
2. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, tako da je $a < m + \varepsilon$.

V takem primeru pišemo $m = \inf A$, število m pa imenujemo tudi *največja spodnja meja* ali *natančna spodnja meja.* V kolikor velja tudi $m \in A$, je m *minimum* množice A.

Naloge:

1. Podana je množica
$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Določi supremum, infimum, minimum in maksimum (če obstajajo) množice A.

2. Podana je množica
$$A = \left\{ \frac{3n+2}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Določi supremum, infimum, minimum in maksimum (če obstajajo) množice A.

3. Podana je množica
$$A = \left\{ \frac{4x}{x+2} \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}.$$
Določi supremum, infimum, minimum in maksimum (če obstajajo) množice A.

4. Naj bo M množica vseh števil x iz intervala $[0,1]$, za katere velja, da ima x v decimalnem zapisu vsaj eno števko 3. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum (če obstajajo) množice M.

5. Naj bo M množica vseh števil x iz intervala $(0,1]$, za katere velja, da je vsaka števka od x bodisi 0 bodisi praštevilo. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum (če obstajajo) množice M.

6. Naj bosta $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2\}$ in $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}$.
   (a) Dokaži, da množica A nima največjega elementa.
   (b) Dokaži, da množica B nima najmanjšega elementa.
   (c) Dokaži, da A nima supremuma v $\mathbb{Q}$.

3.4 Celi del realnega števila

Naj bo x realno število. Največje celo število k, za katerega velja $k \leq x$, imenujemo *(spodnji) celi del od* x. Označimo $k = [x]$ ali tudi $k = \lfloor x \rfloor$.

Naloge:

1. V evklidski ravnini skiciraj naslednje množice:

   (a) $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = [x]\}$,

   (b) $B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = [x] + x\}$,

   (c) $C = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = [x^2]\}$.

2. Reši naslednji enačbi:

   (a) $[x] + [x] = [2x]$,

   (b) $[x] + [2x] = [3x]$.

3. Dana je množica

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a, a_1 a_2 \ldots a_n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}_0, a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, 1 \leq i \leq n\}.$$

   Izrazi a_1 in a_2 s pomočjo funkcije celi del.

3.5 Dedekindovi rezi

Množica $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ je *rez*, če velja:

(i) $\alpha \neq \emptyset$ in $\alpha \neq \mathbb{Q}$,

(ii) za vsak $r \in \alpha$ in za vsak $s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ velja $r < s$,

(iii) za vsak $r \in \alpha$ obstaja tak $r_1 \in \alpha$, da je $r_1 > r$.

Pogoj (ii) lahko nadomestimo s pogojem $(ii)'$: za vsak $r \in \alpha$ velja: $s \in \mathbb{Q}$ in $s < r \Rightarrow s \in \alpha$.

Očitno je, da je $\alpha_r = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < r\}$ rez za poljubno racionalno število r.

Definiramo, da je rez α *pozitiven*, če je $0 \in \alpha$.

Naloge:

1. Naj bosta α in β reza. Dokaži, da je vsota rezov $\alpha+\beta$ tudi rez, če je
$$\alpha+\beta=\{a+b \mid a\in\alpha, b\in\beta\}.$$

2. Naj bo α rez in naj bo
$$-\alpha=\{-s \mid s\in\mathbb{Q}\backslash\alpha,\ s\neq\inf(\mathbb{Q}\backslash\alpha)\}.$$
Dokaži, da je tudi $-\alpha$ rez.

3. Naj bo α pozitiven rez. Dokaži, da velja
$$\alpha+(-\alpha)=\alpha_0.$$

4. Naj bosta α in β pozitivna reza in naj bo
$$\alpha\cdot\beta=\mathbb{Q}_0^-\cup\{ab \mid a\in\alpha, b\in\beta, a>0, b>0\},$$
kjer $\mathbb{Q}_0^-$ označuje množico vseh racionalnih števil, ki niso pozitivna. Dokaži, da je tudi $\alpha\cdot\beta$ rez.

5. Naj bo α pozitiven rez in naj bo
$$\alpha^{-1}=\mathbb{Q}_0^-\ \cup\ \left\{\frac{1}{r}\ \middle|\ r\in\mathbb{Q}\setminus\alpha \text{ in } r\neq\inf(\mathbb{Q}\setminus\alpha)\right\},$$
kjer $\mathbb{Q}_0^-$ označuje množico vseh racionalnih števil, ki niso pozitivna. Dokaži, da je tudi α^{-1} rez.

6. Naj bodo α, β in γ pozitivni rezi. Dokaži, da velja distributivnostni zakon
$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

7. Naj bo ε poljubno pozitivno racionalno število in naj bo α rez. Dokaži, da obstajata tak $a\in\alpha$ in tak $b\in\mathbb{Q}\setminus\alpha$, da je $b-a=\varepsilon$.

8. Naj bo α pozitiven rez. Dokaži, da je $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha_1$. *Namig: uporabi nalogo 7.*

3.6 Iracionalna števila

Številu $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rečemo *iracionalno število.*

Naloge:

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno.
2. Dokaži, da je število $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ iracionalno.
3. Dokaži, da je $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ iracionalno število.
4. Naj bo a pozitivno racionalno število, r in s pa naj bosta iracionalni števili in naj velja $r > 0$.
   (a) Dokaži, da so števila $\sqrt{r}$, $a + r$ in ar iracionalna.
   (b) Ali lahko kaj podobnega poveš o številih $r + s$, rs in $\sqrt{a}$?
5. Dokaži, da med poljubnima različnima realnima številoma obstaja vsaj eno iracionalno število.
6. Naj bo n naravno število. Dokaži, da je $\sqrt{n^2 + n}$ iracionalno število.

3.7 Absolutna vrednost, enačbe in neenačbe

Za $x \in \mathbb{R}$ je *absolutna vrednost* od x, ki jo označimo kot $|x|$, definirana s predpisom

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Naloge:

1. Poišči realne rešitve enačb:
   (a) $|x| = |x - 1| + 1$,
   (b) $|2 - x| = |3x + 6| - 2$.
2. Poišči realne rešitve neenačb:

(a) $|1-|x-1||<1$,

(b) $||3-x|-2x|\leq 9$,

(c) $|x^2-1|+1\leq |x+2|$,

(d) $\frac{x^2-1}{x-4}>0$,

(e) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>2$,

(f) $|\frac{x^2-1}{x-7}|<2$,

(g) $\sqrt{x^2+2}>2-x$.

3. Skiciraj grafa funkcij, ki je podana s predpisoma

$$f(x)=\frac{1}{2}(|x|+x) \quad \text{in} \quad g(x)=\frac{1}{2}(|x|-x).$$

Obe funkciji zapiši brez znakov za absolutno vrednost.

4. Skiciraj grafa funkcij, ki sta podani s predpisoma

$$f(x)=||x-2|-1| \quad \text{in} \quad g(x)=|2x+2|-|2x-2|.$$

Obe funkciji zapiši brez znakov za absolutno vrednost.

5. Skiciraj grafa funkcij, ki sta podani s predpisoma

$$f(x)=2x+|1-x^2| \quad \text{in} \quad g(x)=|1-x^2|+|4-x^2|.$$

Obe funkciji zapiši brez znakov za absolutno vrednost.

6. Glede na realno število a skiciraj graf funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kjer je

$$f(x)=|x-2a|+|x+a|.$$

Poglavje 4

Kompleksna števila

4.1 Osnovno o kompleksnih številih

Množica vseh *kompleksnih števil*, ki jo označimo s $\mathbb{C}$, je definirana kot množica vseh urejenih parov (a, b), kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$. Na množico $\mathbb{C}$ vpeljemo operaciji seštevanja in množenja, za kateri velja:

1. seštevanje kompleksnih števil: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
2. enota za seštevanje: $(0, 0)$,
3. množenje kompleksnih števil: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$,
4. enota za množenje: $(1, 0)$.

Izkaže se, da je množica kompleksnih števil, skupaj z operacijama seštevanja in množenja, komutativni obseg. Kompleksna števila prikažemo v *kompleksni ravnini*.

Kompleksno število $(a, 0)$ bomo zapisovali samo kot a. Kompleksno število $(0, 1)$ bomo označevali z i. Zlahka vidimo, da je $i^2 = -1$. Izkaže se, da lahko kompleksno število (a, b) zapišemo kot $a + bi$.

Naj bo $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definiramo:

1. *realni del* števila z: $\mathrm{Re}(z) = a$,
2. *imaginarni del* števila z: $\mathrm{Im}(z) = b$,

3. *konjugirano kompleksno število*: $\overline{z} = a - bi$,

4. *absolutna vrednost*: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Opazimo, da je

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{in} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Naloge:

1. V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Re}(z^2) + 2(\mathrm{Im}(z))^2 - 4 = 0\}.$$

2. V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(\overline{z}) = \mathrm{Im}(z^2)\}.$$

3. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$|z + 1| = |2z - 1|.$$

   Kaj predstavlja množica rešitev v kompleksni ravnini? Skiciraj!

4. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$iz + z \cdot \overline{z} = \frac{3}{4} - i.$$

5. V kompleksni ravnini skiciraj naslednje množice:

   (a) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| < 2\}$,

   (b) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 - \frac{3}{2}i| \leq 1\}$,

   (c) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |z + 1|\}$,

   (d) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z) + 1| = |z - 1|\}$,

   (e) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| + |z + 3| = 10\}$.

6. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$\overline{z} = z^2.$$

7. V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(4z) + 2zi - \overline{z}| \leq 3\sqrt{5}\}.$$

   Vse korake računsko utemelji.

8. Dokaži, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

9. Funkcija $f : \mathbb{C} \backslash \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{2z}{1+z^2}.$$

   Dokaži: če je $|z| = 1$, tedaj je $f(z) \in \mathbb{R}$.

10. Funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{z}{\overline{z}}.$$

    Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $f(z)$ realno število.

11. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$|\operatorname{Im}(z^n)| \leq n |\operatorname{Im}(z)||z^{n-1}|.$$

12. Naj bosta z_1, z_2 poljubni kompleksni števili, za kateri velja $|z_1| = |z_2| = 1$ in $z_1 z_2 \neq -1$. Dokaži, da je

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

    realno število.

13. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja

$$z^2 + i \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(\overline{z}).$$

4.2 Polarni zapis kompleksnega števila

Kompleksno število $z = a + bi$ lahko zapišemo tudi v *polarni obliki*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je $r = |z|$ *polmer* kompleksnega števila z in $\varphi = \arg(z)$ *argument* števila z. Za računanje argumenta φ si pomagamo s formulo $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$. Opazimo tudi, da je $a = r\cos\varphi$ in $b = r\sin\varphi$.

Izkaže se, da za poljubni kompleksni števili $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ velja

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

De Moivreova formula: za poljubno kompleksno število $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ velja

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

kjer je n poljubno naravno število.

Naloge:

1. Kompleksno število $z = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ zapiši v polarni obliki.
2. Izračunaj $(3 + i\sqrt{3})^{2022}$.
3. V kompleksni ravnini skiciraj množici:
   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} \le \arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}$,
   (b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} \le \arg(z) < \frac{\pi}{2}, 1 \le |z| \le 2\}$.
4. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe
   $$z^3 - 125i = 0.$$
   Rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.
5. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja
   $$z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0.$$

Rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

6. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$z^8 - z^4 - 6 = 0.$$

Rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

7. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$z^3 + 3z^2 i - 3z - 1 = 0.$$

Rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

8. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja

$$z^4 - 2z^2 + 4iz(-1 + iz + z^2) + 8\sqrt{2} + 1 = 8\sqrt{2}i.$$

Rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

9. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$z^n = \bar{z},$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$.

10. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$(z+1)^n - z^n = 0.$$

11. Naj bo $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Poišči vse $n \in \mathbb{N}$, za katere je z^n od i oddaljen za $\sqrt{3}$.

12. Naj bosta z_1 in z_2 rešitvi enačbe $z^2 - 2az + b = 0$, kjer sta $a, b \in \mathbb{C}$. Dokaži, da velja $|z_1| = |z_2| = 1$ natanko tedaj, ko je $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $\arg(b) = 2\arg(a) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

13. Izrazi $\cos(5x)$ in $\sin(5x)$ s pomočjo $\cos x$ in $\sin x$. Odgovora utemelji!

14. Dokaži, da za vsak $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, velja

$$\left| \frac{|z| - \bar{z}}{\bar{z}} \right| \leq |\mathrm{Arg}(z)|,$$

kjer je $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ enolično določen argument števila z.

15. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja $|z| = 1$ in

$$\left| \frac{z^3}{\overline{z}} + \frac{(\overline{z})^3}{z} \right| = 1.$$

Poglavje 5

Zaporedja

5.1 Osnovno o zaporedjih

Realno zaporedje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je preslikava, ki slika iz množice naravnih števil v množico realnih števil. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ namesto $a(n)$ pišemo kar a_n. Zaporedje na kratko označimo kot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ali pa kar kot (a_n). Podobno je *kompleksno zaporedje* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ preslikava, ki slika iz množice naravnih števil v množico kompleksnih števil. V nadaljevanju se bomo večinoma osredotočili na realna zaporedja, čeprav večina definicij in lastnosti velja tudi za kompleksna zaporedja.

Realno zaporedje (a_n) je *navzgor omejeno*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq M$.
Realno zaporedje (a_n) je *navzdol omejeno*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq m$.
Realno zaporedje (a_n) je *omejeno*, če je navzgor in navzdol omejeno. Kompleksno zaporedje (z_n) je omejeno, če obstaja tak $M > 0$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|z_n| \leq M$.

Število s je *stekališče* zaporedja (a_n), če je za vsak $\varepsilon > 0$ pogoj $|a_n - s| < \varepsilon$ izpolnjen za neskončno mnogo indeksov n.

Velja, da ima vsako omejeno zaporedje stekališče.

Število a je *limita* zaporedja (a_n) natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, velja $|a_n - a| < \varepsilon$. V tem primeru pišemo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Definicijo lahko strnemo takole:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Vsako zaporedje ima največ eno limito. Zaporedje je *konvergentno*, če ima limito. Zaporedje, ki ni konvergentno, je *divergentno*.

Naj bo (a_n) realno zaporedje. Veljata naslednji trditvi.

1. Zaporedje (a_n) je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima samo eno stekališče.
2. Število $s \in \mathbb{R}$ je stekališče zaporedja (a_n) natanko tedaj, ko obstaja podzaporedje tega zaporedja, ki konvergira k s.

Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji. Veljajo naslednja pravila za računanje z limitami:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. če je $c \in \mathbb{C}$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$,
4. če je $b_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Naj bosta (a_n) in (b_n) realni konvergentni zaporedji z isto limito in naj bo (c_n) realno zaporedje, za katerega velja $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vsako naravno število n. Potem je tudi zaporedje (c_n) konvergentno in velja

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Naj bo (z_n) zaporedje kompleksnih števil in naj bo $z_n = a_n + b_n i$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem velja:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + bi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ in } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Naloge:

1. Dano je zaporedje $(a_n) = (5, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, ...)$. Določi stekališča, limito, infimum, supremum, minimum, maksimum zaporedja (a_n).

2. Dano je zaporedje $(a_n) = (1, 4, 2, 2, 4, 2, 3, 4, 2, 4, 4, 2, 5, 4, 2, ...)$. Določi stekališča, limito, infimum, supremum, minimum, maksimum zaporedja (a_n).

3. Dano je zaporedje $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, ...)$. Določi stekališča, limito, infimum, supremum, minimum, maksimum zaporedja (a_n).

4. Dano je zaporedje $(a_n) = \left(\frac{1}{2}\,, -2\,, \frac{3}{4}\,, -4\,, \frac{5}{6}\,, -6\,, \frac{7}{8}\,, -8\,, \ldots\right)$. Izračunaj $\sup(a_n)$ in $\inf(a_n)$ (če obstajata) ter poišči stekališča zaporedja (a_n). Ali je zaporedje (a_n) konvergentno? Odgovor utemelji!

5. Poišči zaporedje, ki bo imelo

   (a) pet stekališč,

   (b) vsako naravno število za stekališče,

   (c) vsako realno število za stekallišče.

6. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2n-1}, & n = 3k-2, k \in \mathbb{N} \\ \frac{5n^2}{10n^2+1}, & n = 3k-1, k \in \mathbb{N} \\ 2 - \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+2}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Izračunaj $\sup(a_n)$ in $\inf(a_n)$ (če obstajata) ter poišči stekališča zaporedja (a_n). Ali je zaporedje (a_n) konvergentno? Odgovor utemelji!

7. Poišči vsa stekališča zaporedja (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

8. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom $a_n = \frac{5-n^2}{2n^2+3n+1}$.

   (a) Izračunaj limito zaporedja (a_n).

   (b) Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\frac{1}{100}$?

9. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{3\sqrt{n}-4}{1-4\sqrt{n}}.$$

Določi limito zaporedja (a_n) in s pomočjo definicije preveri, da je res limita. Ugotovi tudi, od katerega člena naprej so vsi členi od limite oddaljeni manj kot $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

10. Izračunaj limite:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)^6}{(n+1)(n^2+3)(n^3+5)}$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{16n+1}}{\sqrt[5]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$,

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(n+\sqrt[3]{1-n^3})$,

    (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+5\cdot 4^n}{3^n+4^n}$.

11. Če obstaja, izračunaj limito zaporedja (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

12. Izračunaj limito zaporedja (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot \ldots \cdot (\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}).$$

13. Naj bo a poljubno realno število. Določi kakšno zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti a. Ali obstaja tudi zaporedje iracionalnih števil, ki konvergira proti a?

5.2 Monotona in rekurzivno podana zaporedja

Realno zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$.
Realno zaporedje (a_n) je *padajoče*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq a_{n+1}$.
Realno zaporedje (a_n) je *monotono*, če je padajoče ali naraščajoče.

Veljata naslednji trditvi.

1. Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno.

2. Padajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno.

Pravimo, da je zaporedje podano *rekurzivno*, če poljubni člen zaporedja (razen začetnih) računamo s pomočjo predhodnih členov.

Naloge:

1. Zaporedje (a_n) je podano na rekurzivno

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 1 \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

   Preveri, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

2. Zaporedje (a_n) je podano kot

$$a_n = \ln(2 + \ln(2 + \ln(2 + \ln(2 + \cdots + \ln 2)\cdots))),$$

   kjer se funkcija ln pojavi n-krat.

   (a) Zaporedje (a_n) zapiši s pomočjo rekurzije.

   (b) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in da za njegovo limito L velja zveza $L = \ln(L + 2)$.

3. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Dokaži, da je zaporedje (a_n) omejeno.

   (b) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

4. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^6}{6^n}.$$

   Izračunaj limito tega zaporedja.

5. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

   Ali obstaja limita podanega zaporedja? Odgovor utemelji!

6. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Dokaži, da vsak člen zaporedja (a_n) leži na intervalu $[1, 3]$.

   (b) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in odgovor dokaži s pomočjo definicije limite.

7. Zaporedje (a_n) je podano kot

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 + a_n} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

   Poišči kandidata za limito zaporedja (a_n) in s pomočjo definicije limite pokaži, da je to res limita.

5.3 Cauchyjeva zaporedja

Zaporedje (a_n) je *Cauchyjevo* natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsaka $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, velja $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Za realno ali kompleksno zaporedje velja, da je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.

Naloge:

1. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ddots + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3}}}},$$

   pri čemer se število 3 v izrazu pojavi n-krat.

   (a) Dokaži, da je (a_n) Cauchyjevo zaporedje.

   (b) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Zaporedje (b_n) je podano s splošnim členom

$$b_n = \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2^2}\sin 2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\sin n.$$

(a) Dokaži, da je (b_n) Cauchyjevo zaporedje.

(b) Izračunaj $\lim_{n\to\infty} b_n$.

3. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

S pomočjo Cauchyjevega pogoja pokaži, da zaporedje (a_n) divergira.

5.4 Še nekaj nalog iz zaporedij

Eulerjevo število e je definirano kot: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Naloge:

1. Izračunaj naslednje limite, če obstajajo:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n$,

   (c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{2n^2+1}$.

2. Dokaži ali s protiprimerom ovrzi naslednji trditvi.

   (a) Če zaporedje (a_n) konvergira, potem je monotono.

   (b) Če je zaporedje (a_n) konvergentno in $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potem zaporedje (b_n) s splošnim členom $b_n = (-1)^n a_n$ divergira.

3. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom $a_n = \sqrt[n]{n}$. Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

4. Naj bo $r > 0$. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom $a_n = \sqrt[n]{r}$. Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

5. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom $a_n = \sqrt[n]{n!}$. Dokaži, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor neomejeno.

6. Naj bosta (a_n) in (b_n) realni zaporedji in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$b_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{1}\right).$$

   Dokaži: če $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tedaj je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

7. Naj bo (a_n) omejeno zaporedje. Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno natanko tedaj, ko je $\limsup(a_n) = \liminf(a_n)$.

Poglavje 6

Številske vrste

6.1 Osnovno o vrstah

Naj bo (a_n) realno (ali kompleksno) zaporedje. *Vrsta* je formalna vsota

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Vrsti priredimo *zaporedje delnih vsot* (s_n), kjer za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Pravimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira*, če konvergira zaporedje delnih vsot (s_n), sicer vrsta *divergira*.

Za konvergentno vrsto definiramo njeno *vsoto* kot

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Potrebni pogoj za konvergenco vrste: če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Geometrijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1}$ z začetnim členom a in koeficientom k konvergira natanko tedaj, ko je $|k| < 1$. V tem primeru je njena vsota

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \cdots = \frac{a}{1-k}.$$

Naloge:

1. Ugotovi in utemelji, ali naslednje vrste konvergirajo:

   (a) $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$,

   (b) $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \cdots + n - n + \cdots$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n-1}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n+1}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

   Če posamezna vrsta konvergira, izračunaj tudi njeno vsoto.

2. Naj bo zaporedje delnih vsot (s_n) vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podano s splošnim členom

$$s_n = 1 + \frac{2n}{n+1}.$$

Določi splošni člen vrste a_n in ugotovi, ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Če je konvergentna, izračunaj tudi njeno vsoto.

3. Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{2n}}{5^{n+1}}.$$

6.2 Vrste z nenegativnimi členi

Naj bo $s \in \mathbb{R}$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira za $s > 1$ in divergira za $s \leq 1$. V primeru $s = 1$ se dana vrsta imenuje *harmonična vrsta.*

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj kriterijev, s pomočjo katerih lahko preverjamo konvergenco vrst.

Primerjalni kriterij I (test z majoranto/minoranto).
Naj bo $0 \leq a_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Velja:

1. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Primerjalni kriterij II.
Naj bo $a_n > 0$ in $b_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in recimo, da obstaja limita $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Velja:

1. Če je $L \in (0, \infty)$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. Če je $L = 0$, potem iz konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Če je $L = \infty$, potem iz divergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi divergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

D'Alembertov kvocientni kriterij.
Naj bo $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in recimo, da obstaja limita $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Velja:

1. Če je $L < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Če je $L > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Cauchyjev korenski kriterij.
Naj bo $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in recimo, da obstaja limita $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Velja:

1. Če je $L < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Če je $L > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Raabejev kriterij.
Naj bo $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in recimo, da obstaja limita $L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.
Velja:

1. Če je $L > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Če je $L < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Naloge:

1. Preuči konvergenco vrst:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{2^n}$, kjer je $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

2. Za katere vrednosti $a \in \mathbb{R}^+$ vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$

   (a) konvergira?

   (b) divergira?

3. Preuči konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, kjer je $a \in \mathbb{R}^+$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n(n+1)}$,

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$,

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

4. S pomočjo primerjalnega kriterija II preuči konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+5}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n+1}}$.

5. S pomočjo Raabejevega kriterija preuči konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$, kjer je $a \in \mathbb{R}^+$.

6. Naj bo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta, kjer je $a_n \geq 0$ za vse indekse n. Dokaži, da je tedaj tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

   konvergentna.

   Ali gornji sklep velja tudi, če vrsta nima samih nenegativnih členov? Odgovor dokaži ali ovrzi s protiprimerom.

6.3 Vrste s poljubnimi členi, absolutno in pogojno konvergentne vrste

Vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vedno velja, da če vrsta absolutno konvergira, potem tudi konvergira.

Če vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, vendar ne konvergira absolutno, potem pravimo, da *pogojno konvergira*.

V nadaljevanju bomo spoznali še tri kriterije, s pomočjo katerih lahko preverjamo konvergenco vrst.

Leibnizev kriterij.
Naj bo (a_n) padajoče zaporedje, za katerega velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ in $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira.

Dirichletov kriterij.
Naj bo (a_n) realno zaporedje in (b_n) kompleksno zaporedje, tako da velja:

- (a_n) je monotono in $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- obstaja tak $M > 0$, da je $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leq M$ za vsak $N \in \mathbb{N}$.

Potem vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira.

Abelov kriterij.
Naj bo (a_n) takšno zaporedje, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Naj bo še (b_n) monotono in konvergentno zaporedje. Potem vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira.

Naloge:

1. Pokaži, da je spodnja vrsta pogojno konvergentna:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+1}.$$
2. Dokaži, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ pogojno konvergira.
3. Za katere $x \in \mathbb{R}$ vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
   (a) absolutno konvergira?

(b) konvergira?

4. Za katere realne vrednosti a in s vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{na}}{n^s}$$

pogojno konvergira?

5. Ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}\sin n$$

absolutno konvergira?

6. Preveri, ali je vrsta

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

konvergentna.

7. Za katere $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^2}$

(a) absolutno konvergira?

(b) konvergira?

8. Za katere $x \in \mathbb{R}$ vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}$$

konvergira? V teh primerih izračunaj tudi njeno vsoto.

9. S pomočjo Dirichletovega kriterija dokaži konvergenco vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\ln n}.$$

10. S pomočjo Abelovega kriterija pokaži, da vrste konvergirajo:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)!\cos\left(\frac{1}{n^4}\right)}{3^n(n+3)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3n}{n^4+n+3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k^4} \right)$.

6.4 Produkt vrst

Produkt vrst $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ lahko definiramo kot vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, kjer za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

Naloge:

1. Poišči takšni konvergentni vrsti, za kateri velja, da je vrsta, pridobljena s produktom danih vrst, divergentna.

Poglavje 7

Primeri kolokvijev in pisnih izpitov

7.1 Primer prvega kolokvija

1. **[20]** Podana je preslikava $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom $F : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

   (a) Naj bo $D = \mathbb{R}^2$. Ugotovi, ali je funkcija F v tem primeru injektivna oz. ali je surjektivna. Odgovora utemelji z dokazom.

   (b) Naj bo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0) \ \wedge \ (y = 3x)\}$. Ali je funkcija F v tem primeru injektivna oz. ali je surjektivna? Odgovora utemelji z dokazom.

2. **[20]** Naj bosta p in q različni praštevili. Dokaži, da je $\sqrt[3]{\frac{p^2}{q}}$ iracionalno število. Ugotovi še, ali enak sklep vedno velja tudi v primeru, če je p naravno število, ki ni praštevilo (q pa je praštevilo). Odgovor natančno utemelji!

3. **[15]** Naj bo A neprazna in navzgor omejena podmnožica pozitivnih realnih števil. Označimo $\sup A = S$ in definiramo množico $B = \left\{\frac{1}{a} \mid a \in A\right\}$. Dokaži, da je $\inf B = \frac{1}{S}$.

4. **[20]** Poišči vsa realna števila x, za katera velja

$$|x - 2| < |x^2 - 4| + x + 1.$$

   Vse korake računsko utemelji.

5. (a) **[5]** Naj bo z poljubno kompleksno število in n poljubno naravno število. Dokaži, da je $z^n + (\bar{z})^n$ realno število.

(b) **[20]** Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja $|z| = 1$ in

$$\left| \frac{z^4}{\overline{z}} + \frac{(\bar{z})^4}{z} \right| = 1.$$

Čas reševanja je **120 minut.**

7.2 Primer drugega kolokvija

1. **[25]** Naj bo $c \in \mathbb{R}^+$. Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je podano z začetnim členom $a_1 = 2c$ in rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c^2}{a_n}\right) \quad \text{za vse} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaži, da je c spodnja meja zaporedja (a_n) ter da je zaporedje monotono in konvergentno za vsak $c \in \mathbb{R}^+$. Izračunaj tudi limito zaporedja (a_n).

2. **[25]** Izračunaj limiti in odgovora natančno utemelji:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{6 + 4\sqrt[3]{n^2+1}} + \sqrt[7]{2n}}{\sqrt[3]{3-8n}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\left(\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt[n+1]{3}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt[n+2]{3}\right)\right)$.

3. **[25]** Ugotovi, ali sta spodnji vrsti konvergentni:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n n!}{(3n)!}$.

Ali katera izmed vrst pogojno konvergira? Odgovore utemelji.

4. **[25]** Naj bo $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in naj bo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta. Dokaži, da potem konvergirata tudi vrsti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_n^3}{5+a_n^2}$.

Čas reševanja je **120 minut.**

7.3 Primer pisnega izpita I

1. **[25]** Naj bosta p, q dve različni praštevili in naj bo n poljubno naravno število. Dokaži, da sta $\sqrt[3]{pq}$ in $\sqrt{n^2 + 2n}$ iracionalni števili.

2. (a) **[20]** Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

   $$z^6 + 26iz^3 + 27 = 0.$$

   Odgovor utemelji in dobljena števila tudi skiciraj v kompleksni ravnini!

   (b) **[10]** Naj bosta z_1, z_2 poljubni kompleksni števili, za kateri velja $|z_1| = |z_2| = 1$ in $z_1 z_2 \neq 1$. Dokaži, da je

   $$\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2}$$

   realno število.

3. **[20]** Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je podano rekurzivno:

   $$a_1 = 5, \; a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 1}.$$

   Ali je zaporedje (a_n) konvergentno? Odgovor utemelji. Če je zaporedje konvergentno, izračunaj tudi njegovo limito.

4. **[25]** Ugotovi in utemelji, ali spodnji vrsti konvergirata:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}\right)^{-n\sqrt{n}}$.

   Če katera izmed vrst konvergira, izračunaj tudi njeno vsoto!

Čas reševanja je **120 minut.**

7.4 Primer pisnega izpita II

1. **[25]** Podani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x-1| < x|x+2|\} \text{ in } B = \{x \in \mathbb{R}\,;\, |2-|x-1|| \leq 3\}.$$

Določi minimum, maksimum, infimum in supremum (če obstajajo) množic $A \cup B$ in $A \cap B$. Vse odgovore računsko utemelji!

2. **[25]** Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja

$$z^4 - 2z^2 + 4iz(-1 + iz + z^2) + 8\sqrt{2} + 1 = 8\sqrt{2}i.$$

Rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

3. **[25]** Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je podano rekurzivno:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(a) Zapiši splošni člen zaporedja (a_n). Nato preveri, da je zaporedje konvergentno in poišči njegovo limito.

(b) Poišči tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da bo za vse $m, n \geq n_0$ veljalo $|a_m - a_n| < \frac{1}{100}$.

4. **[25]** Poišči vsa realna števila x, za katera spodnji vrsti konvergirata oziroma za katera divergirata:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\left(\frac{3n-1}{3n+3}\right)^n$.

Odgovore utemelji.

Čas reševanja je **120 minut.**

Literatura

[1] M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič, Rešene naloge iz analize I, DMFA, Ljubljana, 1992.

[2] B. Drinovec Drnovšek, S. Strle, Naloge iz analize 1: z odgovori, nasveti in rešitvami, DMFA, Ljubljana, 2016.

[3] B. Hvala, Zbirka izpitnih nalog iz analize, DMFA, Ljubljana, 2007.

[4] M. Jakovac, N. Tratnik, Zbrano gradivo: vaje iz elementarnih funkcij, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019 (dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2019/01/ef_gradivo_vaje-1.pdf` dne 16. 8. 2021).

[5] N. Tratnik, Zbrano gradivo: temeljni pojmi analize in elementarne funkcije – izpitne naloge z namigi, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019 (dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2019/01/ef_gradivo_izpiti.pdf` dne 2. 11. 2021).

[6] P. Žigert Pleteršek, M. Črepnjak, Visokošolski učbenik z rešenimi nalogami: Matematika I, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Maribor, 2013.