UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Niko Tratnik

Zbrano gradivo: izpitne in kolokvijske naloge iz teorije množic v letih 2015-2017

Maribor, 2019

PREDGOVOR

V tem gradivu so zbrane naloge, ki sem jih v študijskih letih 2014/15, 2015/16 in deloma v 2016/17 pripravljal za pisne izpite in kolokvije pri predmetu Teorija množic. Naloge so namenjene predvsem študentom prvega letnika matematike in tudi študentom dvopredmetne izobraževalne matematike. V prvem poglavju so zbrane tudi osnovne definicije, ki lahko koristijo pri reševanju nalog. Pri izbiri nalog sem si pomagal tudi z obstoječimi učbeniki, zbirkami vaj in internetnimi viri, tako da vse naloge niso originalni prispevki.

Kazalo

Poglavje 1

Uvodni pojmi teorije množic

V tem poglavju je podanih nekaj osnovnih definicij iz teorije množic. Podrobnejšo razlago lahko najdemo na primer v literaturi [2]. Ker se poglavje o osnovah logike in množic obravnava že v prvem semestru, ga tukaj le na kratko obnovimo.

Logika in množice

Izjava je neka smiselna poved, za katero lahko določimo, ali je pravilna (v tem primeru ji priredimo logično vrednost 1) ali nepravilna (v tem primeru ji priredimo logično vrednost 0).

Tvorimo naslednje sestavljene izjave:

- *Negacija* izjave A, ki jo označimo kot $\neg A$ (beremo *ne* A),
- *Konjunkcija* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \wedge B$ (beremo A *in* B),
- *Disjunkcija* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \vee B$ (beremo A *ali* B),
- *Implikacija* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Rightarrow B$ (beremo *če* A*, potem* B),
- *Ekvivalenca* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Leftrightarrow B$ (beremo A *če in samo če* B oz. A *natanko tedaj ko* B).

Definicije zgornjih sestavljenih izjav lahko podamo z resničnostno tabelo:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Izjava, ki je zmeraj pravilna (pri vsakem naboru logičnih vrednosti osnovnih izjav), se imenuje *tavtologija*.

Množice bomo običajno označevali z velikimi črkami, medtem ko za elemente množic večinoma uporabljamo male črke. Kadar nek element a *pripada* množici A, to s simboli zapišemo kot $a \in A$. Množico lahko podamo tako, da naštejemo vse njene elemente, ali pa tako, da zapišemo pogoje, ki karakterizirajo elemente v množici. Pravimo, da je množica B *podmnožica* množice A, če velja, da je vsak element iz B tudi element iz A. V tem primeru pišemo $B \subseteq A$ ali $B \subset A$. Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, če velja $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$.

Prazno množico označimo kot $\emptyset$ ali $\{\}$, univerzalno množico (to je množica vseh elementov, ki nas v neki situaciji zanimajo) pa z $\mathcal{U}$. Uporabljamo naslednje oznake: $\mathbb{N}$ za množico naravnih števil, $\mathbb{Z}$ za množico celih števil in $\mathbb{R}$ za množico realnih števil. Kadar neka množica A vsebuje končno mnogo elementov, rečemo, da je *končna*, število elementov v množici pa v tem primeru imenujemo *moč množice* in označimo kot $|A|$.

Kadar delamo z nekim naborom množic, pogosto govorimo o *razredu* množic namesto o množici množic. Tako se razred vseh množic, ki so podmnožice neke dane množice A, imenuje *potenčna množica* od A in se označi kot $\mathcal{P}(A)$. Kadar je A končna množica, ima potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ natanko $2^{|A|}$ elementov.

Pomembne so naslednje operacije z množicami:

- *Unija* množic A in B: $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$,
- *Presek* množic A in B: $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$,
- *Razlika* množic A in B: $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$,
- *Komplement* množice A: $A^c = \overline{A} = \{x \mid (x \in \mathcal{U}) \wedge (x \notin A)\}$,
- *Kartezični produkt* množic A in B: $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

Za operacije z množicami med drugim veljajo naslednje lastnosti:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,

6. $(A^c)^c = A$,

7. $A \cup A^c = \mathcal{U}$, $A \cap A^c = \emptyset$,

8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (DeMorganova zakona).

Poljubne unije in preseki

Naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ razred množic, kjer je I neka indeksna množica. Za naslednji definiciji bomo uporabili kvantifikatorja *obstaja* ($\exists$) in *za vsak* ($\forall$).

Unija množic iz $\mathcal{A}$, ki jo označimo kot $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ali $\bigcup_{i \in I} A_i$, je sestavljena iz vseh elementov, ki pripadajo vsaj eni množici iz $\mathcal{A}$. Bolj natančno,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \,|\, \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

Presek množic iz $\mathcal{A}$, ki ga označimo kot $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ ali $\bigcap_{i \in I} A_i$, je sestavljen iz elementov, ki pripadajo vsem množicam iz $\mathcal{A}$. Bolj natančno,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \,|\, \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Relacije

Binarna relacija R na neprazni množici A je podmnožica kartezičnega produkta $A \times A$. Kadar za neka elementa $a, b \in A$ velja, da je $(a, b) \in R$, rečemo, da je *a v relaciji z b* in pišemo aRb.

Pravimo, da je binarna relacija R

- *refleksivna*, če za vsak $a \in A$ velja aRa,
- *simetrična*, če za vsaka $a, b \in A$ velja $aRb \Rightarrow bRa$,
- *antisimetrična*, če za vsaka $a, b \in A$ velja $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
- *tranzitivna*, če za vse $a, b, c \in A$ velja: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,
- *sovisna*, če za vsaka $a, b \in A$ velja aRb ali bRa.

Če je relacija R refleksivna, simetrična in tranzitivna, potem jo imenujemo *ekvivalenčna relacija*. Izkaže se, da v tem primeru množica A razpade na ekvivalenčne razrede. Natančneje, *ekvivalenčni razred* elementa $a \in A$ definiramo kot

$$[a]_R = \{b \in A \,|\, aRb\}.$$

Če je relacija R refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, potem jo imenujemo *delna urejenost*, par (A, R) pa *delno urejena množica*. V tem primeru namesto aRb pogosto pišemo $a \overset{R}{\leq} b$ ali kar $a \leq b$. Delna urejenost R, ki je tudi sovisna, se imenuje *linearna urejenost*, par (A, R) pa *linearno urejena množica*.

Naj bo (A, R) delno urejena množica in $S \subseteq A$ neprazna podmnožica. Element $m \in S$ je *najmanjši element* v S, če za vsak $s \in S$ velja $m \overset{R}{\leq} s$. Linearno urejena množica (A, R), za katero velja, da ima vsaka neprazna podmnožica od A najmanjši element, se imenuje *dobro urejena množica*.

Funkcije

Naj bosta A, B množici. *Funkcija* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko en element množice B. Če funkcija f elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, rečemo, da je b *slika* elementa a in pišemo $b = f(a)$. Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico B pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* funkcije f je definirana kot

$$Z_f = \{f(a) \,|\, a \in A\}.$$

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : C \to D$ takšni funkciji, da je $B \subseteq C$. Funkcija $g \circ f : A \to D$, ki je definirana s predpisom $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, se imenuje *kompozitum* funkcij f in g.

Funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za poljubna elementa $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če za poljuben element $b \in B$ obstaja $a \in A$, tako da velja $b = f(a)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Števne in neštevne množice, kardinalna števila

Pravimo, da sta množici A in B *enako močni* ali *ekvipolentni*, če obstaja bijekcija $f : A \to B$. V tem primeru pišemo $|A| = |B|$.

Množica A je *števna*, če je končna ali če ima enako moč kot množica naravnih števil $\mathbb{N}$. V drugem primeru rečemo, da je A *števno neskončna*.

Za množico, ki ima enako moč kot množica realnih števil $\mathbb{R}$, rečemo, da ima *moč kontinuuma*.

Relacija *biti enako močen* je ekvivalenčna relacija na razredu vseh množic, zato le-tega razbije na ekvivalenčne razrede. Posamezen ekvivalenčni razred predstavlja določeno *kardinalno število*. Uporabljata se oznaki $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ in $|\mathbb{R}| = c$.

Naj bosta $a = |A|$ in $b = |B|$ kardinalni števili. Potem je $a \leq b$, če obstaja injektivna funkcija $f : A \to B$. Po definiciji velja še $a < b$ natanko tedaj, ko je $a \leq b$ in $a \neq b$. Med drugim sta znani naslednji trditvi:

- $\aleph_0 < c$,
- za poljubno množico A velja $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Za kardinalna števila vpeljemo tudi operacije seštevanja, množenja in potenciranja [2].

Ordinalna števila

Delno urejeni množici (A, R) in (B, T) sta *izomorfni*, če obstaja bijektivna funkcija $f : A \to B$, tako da za poljubna $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \overset{R}{\leq} a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \overset{T}{\leq} f(a_2)$.

Na razredu vseh dobro urejenih množic je zgoraj opisana relacija ekvivalenčna relacija in zato le-tega razbije na ekvivalenčne razrede. Posamezen ekvivalenčni razred predstavlja določeno *ordinalno število*. Ordinalno število, ki predstavlja ekvivalenčni razred naravnih števil (skupaj s standardno urejenostjo), označimo z w. Za ordinalna števila vpeljemo tudi relacijo $\leq$ ter operacije seštevanja, množenja in potenciranja [2].

Poglavje 2

Kolokviji

2.1 Prvi kolokvij, 5. 5. 2015

1. **[20]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1 + \frac{1}{n} \wedge -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

3. **[25]** Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \longrightarrow Y$ injektivna funkcija.

   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico A množice X velja $f^{-1}(f(A)) = A$.

   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F surjektivna funkcija.

   Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

4. **[30]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

2.2 Kolokvij za izobraževalno matematiko, 5. 5. 2015

1. **[20]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1 + \frac{1}{n} \wedge -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

3. **[30]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj oznaka $K_r(x, y)$ predstavlja krožnico v $\mathbb{R}^2$ s središčem v točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in polmerom r. Dokaži, da je množica $\mathcal{K} = \{K_r(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}^+\}$ števna množica.

2.3 Drugi kolokvij, 12. 6. 2015

1. **[25]** Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Vsako izmed naslednjih dveh trditev dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi:

   (a) Če je množica A števna, je tudi $f(A)$ števna.

   (b) Če je množica B števna, je tudi $f^{-1}(B)$ števna.

2. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 1)$.

   (b) Določi moč množice $\mathbb{R}^2/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

3. **[25]** Naj bo A množica vseh podmnožic od $\mathbb{R}$, ki vsebujejo množico $\mathbb{N}$ ter B množica vseh zaporedij kompleksnih števil. Določi moči množic A in B (pri tem odgovora utemelji) ter ju primerjaj po velikosti.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednja ordinalna števila:

$$(3w + 2)w(w2 + 1), (4w + 1)(w^2 2 + 2), w(5w + 3)(w + 1).$$

2.4 Prvi kolokvij, 6. 5. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) = (B \setminus (C \cup A)) \cup ((C \cup A) \setminus B)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Dana je funkcija $f : A \longrightarrow B$. Naj bo K neprazna množica in naj bo za vsak $k \in K$ množica B_k podmnožica od B. Dokaži, da velja:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) = \bigcup_{k \in K} f^{-1}(B_k)$$

Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $B = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh matrik (vseh možnih dimenzij) z racionalnimi koeficienti. Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

2.5 Prvi kolokvij (ponavljalni), 20. 5. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; n^2x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

   (a) Skiciraj množice A_1, A_2 in A_3.

   (b) Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Za en odgovor zapiši tudi dokaz, da je resničen.

2. **[25]** Dana je funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Naj bosta A in B podmnožici od Y. Dokaži, da velja:

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

   Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \times [0,2]$ in $B = [0,4] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ (x^{23} - 2x^{10} + 5x)^n + 2x^2 - 3 = 0\right\}.$$

   Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

2.6 Drugi kolokvij, 6. 6. 2016

1. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \Longleftrightarrow \cos x - \cos y \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Ali je ekvivalenčni razred števila 0 števna množica?

   (c) Dokaži, da množica $\mathbb{R}/_\sim$ ni števna.

2. **[25]** Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   A - množica vseh polinomov p s predpisom $p(x) = ax^2 + bx + c$,
   kjer je $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

3. **[25]** Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $f : (A, \leq) \longrightarrow (A, \leq)$ strogo naraščajoča funkcija (torej za vsaka $x, y \in A$ velja: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$). Dokaži, da za vsak $a \in A$ velja $a \leq f(a)$.
   Namig: obravnavaj množico $D = \{x \in A \mid x > f(x)\}$.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili
   $\alpha = w^2(w^2 + 3w2 + 1)(2w^2 + 2)$ in $\beta = (w^2 + w3)(w^2 + 2)(w^2 + w)$.

Poglavje 3

Pisni izpiti

3.1 Izpit, 16. 6. 2015

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) = (A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ in $B = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter dokaži, da je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Določi moč množice vseh realnih 2×2 matrik, katerih determinanta je enaka 1. Odgovor utemelji z dokazom!

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 3w + 1$ in $\beta = w2 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

3.2 Izpit, 2. 7. 2015

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \times (C \cup D) = ((A \setminus B) \times C) \cup (A \times D)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = [0, n]$. Izračunaj

(a) $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n > m} A_n \right)$

(b) $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n > m} A_n \right)$

Pri tem naj bodo sklepi utemeljeni.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^3$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter poimenuj in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 0, 1)$. Določi moč množice $\mathbb{R}^3/_{\sim}$ in svoj odgovor utemelji.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili

$$(4w + 1)w(w2 + 2), (3w3 + 1)(2w2 + 2)(w + 1).$$

3.3 Izpit, 24. 8. 2015

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\mid\; \frac{1}{n} < x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 1]$ in $B = \mathbb{R} \times [0, 2]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{R}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili $w^2(w^2 + w)(w^2 + 1)$ in $w^2(w^2 + 1)(w^2 + w)$.

3.4 Izpit, 5. 2. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo
$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}.$$
Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo $A = [0, 2] \times (0, 1)$ in $B = (0, 2) \times [0, 1]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo
$$x \sim y \Longleftrightarrow \sin(x - y) = 0.$$
Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred števila 0 in določi njegovo moč.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2w3 + 3$ in $\beta = 3w2 + 1$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

3.5 Izpit, 13. 6. 2016

1. **[25]** Naj bo I poljubna neprazna množica. Za vsak $i \in I$ naj bosta A_i in B_i množici. Dokaži, da velja

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B_i).$$

2. **[25]** Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $[0, 1) \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$. Utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici vseh realnih 2×2 matrik $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ je definirana s formulo

$$A \sim B \iff \det A = \det B.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Ali je ekvivalenčni razred enotske matrike I števna množica?

   (c) Določi moč množice $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/_{\sim}$.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2w^2 + 2$ in $\beta = 2w3 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha\alpha\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

3.6 Izpit, 27. 6. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \frac{x}{n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

3. **[25]** Naj bodo a, b in c kardinalna števila in naj bo $c \neq 0$. Dokaži, da velja:

$$a \leq b \Longrightarrow c^a \leq c^b.$$

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili

$$\alpha = w(4w + 1)(w2 + 2), \quad \beta = (3w3 + 1)(2w2 + 2)(w + 2).$$

3.7 Izpit za izobraževalno matematiko, 27. 6. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Izračunaj

(a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$

(b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$

ter odgovora utemelji z dokazom.

3. **[25]** Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0, 2)$ ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

4. **[25]** Ali je množica vseh kvadratnih polinomov z racionalnimi koeficienti števna množica? Odgovor utemelji!

3.8 Izpit, 25. 8. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \mid \ \frac{1}{2^n} \leq x < n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija. Množici A in B tudi skiciraj.

3. **[25]** Določi moči množic A, B, C, D ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{N}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to A$.

   D - množica vseh podmnožic množice A.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (w^2 2 + 3w3 + 2)^3, \quad \beta = (2w^2 + 2)(5w^2 2 + 3)(w^2 3 + w).$$

3.9 Izpit za izobraževalno matematiko, 25. 8. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2^n} \leq x < n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

3. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.

3.10 Izpit, 10. 2. 2017

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; e^{-n} \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}_3[X]$ vseh polinomov oblike $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ s koeficienti iz $\mathbb{R}$, je definirana s formulo

$$p \sim q \iff p' = q',$$

kjer p' označuje odvod polinoma p, q' pa odvod polinoma q. Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred polinoma $p(x) = 1$ in določi njegovo moč.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (3w2 + 2)(w3 + 1)(4w + 3), \quad \beta = (w3 + 2)w(2w3 + 3).$$

3.11 Izpit za izobraževalno matematiko, 10. 2. 2017

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli ločeno o veljavnosti posameznih inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \mid \ e^{-n} \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

3. **[25]** Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.

Literatura

[1] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, Zbirka zadataka iz teorije skupova, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2009.

[2] S. Lipschutz, Schaum's outline of theory and problems of set theory and related topics, McGraw-Hill, New York, 1998.

[3] M. Vuković, Teorija skupova, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2013.