UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Niko Tratnik

Zbrano gradivo: izpitne in kolokvijske naloge iz teorije množic v letih 2015-2017

Maribor, 2019

PREDGOVOR

V tem gradivu so zbrane naloge, ki sem jih v študijskih letih 2014/15, 2015/16 in deloma v 2016/17 pripravljal za pisne izpite in kolokvije pri predmetu Teorija množic. Naloge so namenjene predvsem študentom prvega letnika matematike in tudi študentom dvopredmetne izobraževalne matematike. Pri izbiri nalog sem si pomagal z različnimi učbeniki, zbirkami nalog in drugimi internetnimi viri, tako da niso vse zbrane naloge originalni prispevki.

Kazalo

Poglavje 1

Kolokviji

1.1 Prvi kolokvij, 5. 5. 2015

1. **[20]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1 + \frac{1}{n} \wedge -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

3. **[25]** Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \longrightarrow Y$ injektivna funkcija.
   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico A množice X velja $f^{-1}(f(A)) = A$.
   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F surjektivna funkcija.

   Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

4. **[30]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

1.2 Kolokvij za izobraževalno matematiko, 5. 5. 2015

1. **[20]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1+\frac{1}{n} \wedge -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

3. **[30]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj oznaka $K_r(x, y)$ predstavlja krožnico v $\mathbb{R}^2$ s središčem v točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in polmerom r. Dokaži, da je množica $\mathcal{K} = \{K_r(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}^+\}$ števna množica.

1.3 Drugi kolokvij, 12. 6. 2015

1. **[25]** Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Vsako izmed naslednjih dveh trditev dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi:

   (a) Če je množica A števna, je tudi $f(A)$ števna.

   (b) Če je množica B števna, je tudi $f^{-1}(B)$ števna.

2. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 1)$.

   (b) Določi moč množice $\mathbb{R}^2/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

3. **[25]** Naj bo A množica vseh podmnožic od $\mathbb{R}$, ki vsebujejo množico $\mathbb{N}$ ter B množica vseh zaporedij kompleksnih števil. Določi moči množic A in B (pri tem odgovora utemelji) ter ju primerjaj po velikosti.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednja ordinalna števila:

$$(3w + 2)w(w2 + 1), (4w + 1)(w^2 2 + 2), w(5w + 3)(w + 1).$$

1.4 Prvi kolokvij, 6. 5. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) = (B \setminus (C \cup A)) \cup ((C \cup A) \setminus B)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Dana je funkcija $f : A \longrightarrow B$. Naj bo K neprazna množica in naj bo za vsak $k \in K$ množica B_k podmnožica od B. Dokaži, da velja:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}(B_k)$$

Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $B = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh matrik (vseh možnih dimenzij) z racionalnimi koeficienti. Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

1.5 Prvi kolokvij (ponavljalni), 20. 5. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; n^2x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

   (a) Skiciraj množice A_1, A_2 in A_3.

   (b) Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Za en odgovor zapiši tudi dokaz, da je resničen.

2. **[25]** Dana je funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Naj bosta A in B podmnožici od Y. Dokaži, da velja:

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

   Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \times [0, 2]$ in $B = [0, 4] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ (x^{23} - 2x^{10} + 5x)^n + 2x^2 - 3 = 0\right\}.$$

   Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

1.6 Drugi kolokvij, 6. 6. 2016

1. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \iff \cos x - \cos y \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Ali je ekvivalenčni razred števila 0 števna množica?

   (c) Dokaži, da množica $\mathbb{R}/_\sim$ ni števna.

2. **[25]** Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   A - množica vseh polinomov p s predpisom $p(x) = ax^2 + bx + c$, kjer je $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

3. **[25]** Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $f : (A, \leq) \longrightarrow (A, \leq)$ strogo naraščajoča funkcija (torej za vsaka $x, y \in A$ velja: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$). Dokaži, da za vsak $a \in A$ velja $a \leq f(a)$.
   Namig: obravnavaj množico $D = \{x \in A \mid x > f(x)\}$.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili
   $\alpha = w^2(w^2 + 3w2 + 1)(2w^2 + 2)$ in $\beta = (w^2 + w3)(w^2 + 2)(w^2 + w)$.

Poglavje 2

Pisni izpiti

2.1 Izpit, 16. 6. 2015

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) = (A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C)$$

   za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ in $B = (-1, 1)\times(-1, 1)$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter dokaži, da je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Določi moč množice vseh realnih 2×2 matrik, katerih determinanta je enaka 1. Odgovor utemelji z dokazom!

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 3w + 1$ in $\beta = w2 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

2.2 Izpit, 2. 7. 2015

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \times (C \cup D) = ((A \setminus B) \times C) \cup (A \times D)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = [0, n]$. Izračunaj

   (a) $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n>m} A_n \right)$

   (b) $\displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n>m} A_n \right)$

   Pri tem naj bodo sklepi utemeljeni.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^3$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter poimenuj in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 0, 1)$. Določi moč množice $\mathbb{R}^3/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili

$$(4w + 1)w(w2 + 2), (3w3 + 1)(2w2 + 2)(w + 1).$$

2.3 Izpit, 24. 8. 2015

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \mid \ \frac{1}{n} < x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}.$$

   Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0,1]$ in $B = \mathbb{R} \times [0,2]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{R}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili $w^2(w^2 + w)(w^2 + 1)$ in $w^2(w^2 + 1)(w^2 + w)$.

2.4 Izpit, 5. 2. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}.$$

   Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo $A = [0, 2] \times (0, 1)$ in $B = (0, 2) \times [0, 1]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \iff \sin(x - y) = 0.$$

   Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred števila 0 in določi njegovo moč.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2w3 + 3$ in $\beta = 3w2 + 1$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

2.5 Izpit, 13. 6. 2016

1. **[25]** Naj bo I poljubna neprazna množica. Za vsak $i \in I$ naj bosta A_i in B_i množici. Dokaži, da velja

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} \big(A_i \times B_i\big).$$

2. **[25]** Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $[0,1) \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$. Utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici vseh realnih 2×2 matrik $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ je definirana s formulo

$$A \sim B \Longleftrightarrow \det A = \det B.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Ali je ekvivalenčni razred enotske matrike I števna množica?

   (c) Določi moč množice $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/_{\sim}$.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2w^2 + 2$ in $\beta = 2w3 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha\alpha\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

2.6 Izpit, 27. 6. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \frac{x}{n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

3. **[25]** Naj bodo a, b in c kardinalna števila in naj bo $c \neq 0$. Dokaži, da velja:

$$a \leq b \Longrightarrow c^a \leq c^b.$$

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili

$$\alpha = w(4w + 1)(w2 + 2), \quad \beta = (3w3 + 1)(2w2 + 2)(w + 2).$$

2.7 Izpit za izobraževalno matematiko, 27. 6. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Izračunaj

   (a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$

   (b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$

   ter odgovora utemelji z dokazom.

3. **[25]** Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0, 2)$ ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

4. **[25]** Ali je množica vseh kvadratnih polinomov z racionalnimi koeficienti števna množica? Odgovor utemelji!

2.8 Izpit, 25. 8. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\mid\; \frac{1}{2^n} \leq x < n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija. Množici A in B tudi skiciraj.

3. **[25]** Določi moči množic A, B, C, D ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{N}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to A$.

   D - množica vseh podmnožic množice A.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (w^2 2 + 3w3 + 2)^3, \quad \beta = (2w^2 + 2)(5w^2 2 + 3)(w^2 3 + w).$$

2.9 Izpit za izobraževalno matematiko, 25. 8. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{2^n} \leq x < n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

3. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.

2.10 Izpit, 10. 2. 2017

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid e^{-n} \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}_3[X]$ vseh polinomov oblike $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ s koeficienti iz $\mathbb{R}$, je definirana s formulo

$$p \sim q \iff p' = q',$$

kjer p' označuje odvod polinoma p, q' pa odvod polinoma q. Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred polinoma $p(x) = 1$ in določi njegovo moč.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (3w2+2)(w3+1)(4w+3), \quad \beta = (w3+2)w(2w3+3).$$

2.11 Izpit za izobraževalno matematiko, 10. 2. 2017

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli ločeno o veljavnosti posameznih inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid e^{-n} \le x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

3. **[25]** Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.