UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

dr. Niko Tratnik

Zbrano gradivo pri predmetu Teorija množic: zbirka izpitnih nalog s povzetki teorije in rešenimi zgledi

Maribor, 2022

PREDGOVOR

V tem gradivu so zbrane naloge, ki sem jih v študijskih letih 2014/15, 2015/16, deloma 2016/17, 2020/21 in 2021/2022 pripravljal za pisne izpite in kolokvije pri predmetu Teorija množic. Gradivo predstavlja posodobljeno in bistveno dopolnjeno verzijo gradiva iz leta 2019 [5]. Naloge so namenjene predvsem študentom prvega letnika matematike in tudi študentom dvopredmetne izobraževalne matematike. Pri izbiri nekaterih nalog sem si pomagal tudi z obstoječimi učbeniki, zbirkami vaj in drugimi internetnimi viri (glej [1, 3, 4, 6]). Za številne nasvete pri oblikovanju in formulaciji izpitnih in kolokvijskih nalog se zahvaljujem nosilcu predmeta, red. prof. dr. Urošu Milutinoviću.

Naloge v gradivu so sistematično urejene v devet sklopov (v okviru prvih petih poglavij), pri čemer je na začetku vedno povzeta osnovna teorija, ki je potrebna za reševanje nalog in se lahko uporablja tudi kot učni pripomoček na seminarskih vajah. Prav tako je v vsakem sklopu za prvi dve nalogi podana celotna rešitev. Rešene naloge tako služijo kot zgledi, ki lahko pomagajo pri samostojnem reševanju preostalih nalog. V drugem delu gradiva (poglavja 6-10) so v kronološkem vrstnem redu podani še celotni pisni izpiti in kolokviji.

Kazalo

Poglavje 1

Logika in množice

V tem poglavju so najprej podane osnovne definicije o logiki in množicah, ki so povzete po viru [2]. Podrobnejšo razlago lahko najdemo na primer v literaturi [4]. Osnovne vsebine o logiki in množicah se sicer na kratko obravnavajo že v prvem semestru, vendar jih tukaj razširimo z nekaterimi dodatnimi pojmi in težjimi nalogami.

1.1 Osnovno o logiki in množicah

Izjava je neka smiselna poved, za katero lahko objektivno določimo, ali je pravilna (v tem primeru ji priredimo logično vrednost 1) ali nepravilna (v tem primeru ji priredimo logično vrednost 0).

Tvorimo naslednje sestavljene izjave:

- *Negacija* izjave A, ki jo označimo kot $\neg A$ (beremo *ne* A),
- *Konjunkcija* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \wedge B$ (beremo A *in* B),
- *Disjunkcija* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \vee B$ (beremo A *ali* B),
- *Implikacija* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Rightarrow B$ (beremo *če* A, *potem* B),
- *Ekvivalenca* izjav A in B, ki jo označimo kot $A \Leftrightarrow B$ (beremo A *če in samo če* B oz. A *natanko tedaj ko* B).

Definicije zgornjih sestavljenih izjav lahko podamo z resničnostno tabelo:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Izjava, ki je zmeraj pravilna (pri vsakem naboru logičnih vrednosti osnovnih izjav), se imenuje *tavtologija*.

Sedaj ponovimo še nekaj pojmov o množicah. Te bomo običajno označevali z velikimi črkami, medtem ko za elemente množic večinoma uporabljamo male črke. Kadar nek element a *pripada* množici A, to s simboli zapišemo kot $a \in A$. Množico lahko podamo tako, da naštejemo vse njene elemente, ali pa tako, da zapišemo pogoje, ki karakterizirajo elemente v množici. Pravimo, da je množica B *podmnožica* množice A, če velja, da je vsak element iz B tudi element iz A. V tem primeru pišemo $B \subseteq A$ ali $B \subset A$. Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, če velja $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$.

Prazno množico označimo kot $\emptyset$ ali $\{\}$, univerzalno množico (to je množica vseh elementov, ki nas v neki situaciji zanimajo) pa z $\mathcal{U}$. Uporabljamo naslednje oznake: $\mathbb{N}$ za množico naravnih števil, $\mathbb{Z}$ za množico celih števil, $\mathbb{Q}$ za množico racionalnih števil in $\mathbb{R}$ za množico realnih števil. Kadar je neka množica A končna (za formalno definicijo končne množice glej poglavje 3), število elementov v množici imenujemo *moč množice* in označimo kot $|A|$. Posplošitev tega koncepta bomo spoznali v poglavju 4.

Množica vseh množic, ki so podmnožice neke dane množice A, se imenuje *potenčna množica* od A in se označi kot $\mathcal{P}(A)$. Kadar je A končna množica, ima potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ natanko $2^{|A|}$ elementov. Omenimo še, da kadar delamo z nekim naborom množic, večkrat govorimo o *razredu* množic namesto o množici množic.

Pomembne so naslednje operacije z množicami:

- *Unija* množic A in B: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$,
- *Presek* množic A in B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$,
- *Razlika* množic A in B: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$,
- *Komplement* množice A: $A^c = \overline{A} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$,
- *Kartezični produkt* množic A in B: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Za operacije z množicami med drugim veljajo naslednje lastnosti:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,
6. $(A^c)^c = A$,
7. $A \cup A^c = \mathcal{U}$, $A \cap A^c = \emptyset$,
8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (DeMorganova zakona).

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

   Rešitev. *Enakost bomo dokazali tako, da bomo posebej razmislili o veljavnosti obeh inkluzij. Označimo* $L = (C \cap (A \cup B)) \setminus A$ *in* $D = (C \cap B) \setminus A$. *Dokažimo najprej, da je* $L \subseteq D$. *Za ta namen izberimo poljuben element* $x \in L$. *Opazimo, da veljajo naslednji sklepi:*

$$\begin{aligned} x \in L \quad &\Rightarrow \quad (x \in C \wedge (x \in A \vee x \in B)) \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow \quad ((x \in C \wedge x \in A) \vee (x \in C \wedge x \in B)) \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow \quad ((x \in C \wedge x \in A) \wedge x \notin A) \\ &\vee \quad ((x \in C \wedge x \in B) \wedge x \notin A)\,. \end{aligned}$$

   Ker izjava $(x \in C \wedge x \in A) \wedge x \notin A$ *ni resnična, iz zgornjega sledi, da velja* $(x \in C \wedge x \in B) \wedge x \notin A$, *kar pomeni, da je* $x \in (C \cap B) \setminus A = D$ *resnična izjava.*

Sedaj pokažimo še, da je $D \subseteq L$. Najprej izberimo poljuben element $x \in D$. Očitno velja

$$\begin{aligned} x \in (C \cap B) \setminus A &\Rightarrow (x \in C \wedge x \in B) \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow (x \in C \wedge (x \in A \vee x \in B)) \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow x \in L, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da iz $x \in B$ sledi tudi $(x \in A \vee x \in B)$. Dokaz je s tem zaključen.

2. Ali velja enakost
$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$
za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli ločeno o veljavnosti posameznih inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

Rešitev. *S pomočjo skice zlahka opazimo, da enakost v tem primeru ne velja. To lahko pokažemo z naslednjim protiprimerom.*

Naj bo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ in $C = \{2\}$. Potem je $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ in $C \cap B = \{2\}$, zato je leva stran enaka $(A \cup B) \setminus (C \cap B) = \{1, 3\}$. Po drugi strani pa je $B \setminus C = \{3\}$ in zato je desna stran enaka $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3\}$. Pokazali smo, da enakost v splošnem ne velja.

V nadaljevanju dokažimo še, da za poljubne množice A, B, C velja

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) \subseteq A \cup (B \setminus C).$$

V ta namen označimo $L = (A \cup B) \setminus (C \cap B)$ in izberimo poljuben element $x \in L$. Opazimo, da veljajo naslednji sklepi:

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\neg(x \in C \wedge x \in B)) \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C \vee x \notin B) \\ &\Rightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C) \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B) \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \setminus C) \vee x \in A, \end{aligned}$$

kjer smo pri zadnji implikaciji upoštevali, da izjava $(x \in B \wedge x \notin B)$ *ni resnična, iz izjave* $(x \in A \wedge x \notin C)$ *oziroma izjave* $(x \in A \wedge x \notin B)$ *pa sledi* $x \in A$. *Sklenemo torej lahko, da velja* $x \in A \vee x \in (B \setminus C)$, *kar seveda pomeni tudi* $x \in A \cup (B \setminus C)$. *Zgoraj zapisana inkluzija je torej dokazana.*

3. Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa pokaži, da velja enakost
$$(A \cap (B \cup C)) \setminus B = (A \cap C) \setminus B.$$

4. Ali velja enakost
$$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) = (B \setminus (C \cup A)) \cup ((C \cup A) \setminus B)$$
za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

5. Naj bodo A, B in C poljubne množice. Ugotovi in utemelji, ali velja enakost
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup C = \big((A \cup C) \setminus B\big) \cup \big(B \setminus (A \setminus C)\big).$$
Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa. Če ne velja, ugotovi, ali velja katera izmed inkluzij (inkluzije, ki veljajo, prav tako dokaži s pomočjo izjavnega računa).

6. Ali velja enakost
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) = (A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C)$$
za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

7. Ali velja enakost
$$(A \setminus B) \times (C \cup D) = ((A \setminus B) \times C) \cup (A \times D)$$
za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

8. Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

9. Naj bodo A, B, C, D poljubne množice. Ugotovi, ali velja spodnja enakost:

$$(A \setminus B) \times (C \cap D) = ((A \times C) \cap (A \times D)) \setminus ((B \times C) \cap (B \times D)).$$

Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa, sicer pa jo s protiprimerom ovrži.

10. Naj bodo A, B, C poljubne množice. Ugotovi, ali velja spodnja enakost:

$$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C) = A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C)).$$

Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa, sicer pa jo s protiprimerom ovrži.

11. Naj bodo A, B, C poljubne množice. Ugotovi, ali velja spodnja enakost:

$$((A \setminus C) \cap (B \cup C)) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C.$$

Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa, sicer pa jo s protiprimerom ovrži.

1.2 Poljubne unije in preseki

Naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ družina množic, kjer je I neka indeksna množica. Za naslednji definiciji bomo uporabili kvantifikatorja *obstaja* ($\exists$) in *za vsak* ($\forall$).

Unija množic iz $\mathcal{A}$, ki jo označimo kot $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ali $\bigcup_{i \in I} A_i$, je sestavljena iz vseh elementov, ki pripadajo vsaj eni množici iz $\mathcal{A}$. Bolj natančno,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Presek množic iz $\mathcal{A}$, ki ga označimo kot $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ ali $\bigcap_{i \in I} A_i$, je sestavljen iz elementov, ki pripadajo vsem množicam iz $\mathcal{A}$. Bolj natančno,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Izračunaj

   (a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$

   (b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$

   ter odgovora utemelji z dokazom.

   Rešitev. *Primer (a):* *Če narišemo nekaj začetnih množic, hitro postavimo domnevo, da velja*

   $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right] = [0, 2).$$

   Da to formalno dokažemo, izberimo nek poljuben element $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$*. To pomeni, da obstaja tak* $n_0 \in \mathbb{N}$*, da velja* $x \in \left[0, 2 - \frac{1}{n_0}\right]$*. Ker pa je* $2 - \frac{1}{n_0} < 2$*, je tudi* $x \in [0, 2)$*. S tem smo dokazali prvo inkluzijo.*

   Za dokaz druge inkluzije izberimo poljuben element $x \in [0, 2)$*. Sedaj iščemo tak* $n \in \mathbb{N}$*, da bo veljalo* $x \leq 2 - \frac{1}{n}$*. Od tod dobimo* $n \geq \frac{1}{2-x}$*. Če torej izberemo na primer* $n_0 = \left[\frac{1}{2-x}\right] + 1$*, bo veljalo* $x \in \left[0, 2 - \frac{1}{n_0}\right]$ *in posledično tudi* $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$*. S tem je dokaz enakosti zaključen.*

   Primer (b): *Ponovno postavimo domnevo*

   $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right) = (0, 1).$$

   Podobno kot prej izberimo poljuben $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$*. To pomeni, da za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *velja* $x \in \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$*. Za* $n = 1$ *tako dobimo* $x \in (0, 1)$*, s čimer smo dokazali prvo inkluzijo.*

Za dokaz druge inkluzije izberimo poljuben element $x \in (0,1)$. Dokazati je potrebno, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $x \in \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$. Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $2 - \frac{1}{n} \geq 1$, sledi $0 < x < 1 \leq 2 - \frac{1}{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, s čimer je dokaz zaključen.

2. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1 + \frac{1}{n} \ \wedge \ -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

Rešitev. *Če skiciramo nekaj začetnih množic, lahko postavimo domnevo, da velja*
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1, 1] \times \{0\}.$$
Za dokaz prve inkluzije izberimo poljuben element $(x,y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. To pomeni, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $-n \leq x < 1 + \frac{1}{n}$ in $-\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}$. Za $n = 1$ tako dobimo $x \geq -1$. Nadalje dokažimo še, da je tudi $x \leq 1$. Pa recimo, da to ni res in da torej velja $x > 1$. Potem lahko zapišemo $x = 1 + u$, kjer je $u > 0$. Vemo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $1 + u = x < 1 + \frac{1}{n}$ oziroma $u < \frac{1}{n}$. Zato tudi za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $n < \frac{1}{u}$. To je seveda protislovje, saj naravna števila niso navzgor omejena. S tem smo pokazali, da je $x \leq 1$ in posledično $x \in [-1, 1]$.

Dokazati moramo še, da je $y = 0$. Pa recimo, da velja $y \neq 0$. Potem je bodisi $y > 0$ bodisi $y < 0$. Predpostavimo najprej, da je $y > 0$. Vemo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $y \leq \frac{1}{n}$ oziroma $n \leq \frac{1}{y}$. To zaradi argumenta od prej ne more veljati za vsa naravna števila n, zato dobimo protislovje. Nadalje predpostavimo še, da je $y < 0$. V tem primeru uporabimo dejstvo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $-\frac{1}{n} \leq y$ oziroma $n \leq \frac{1}{-y}$, kar spet da protislovje. S tem smo pokazali, da je $y = 0$. Ker od prej vemo, da je $x \in [-1, 1]$, končno sledi $(x,y) \in [-1, 1] \times \{0\}$ in dokaz prve inkluzije je tako končan.

Za dokaz druge inkluzije izberimo poljuben element $(x,y) \in [-1,1] \times \{0\}$, kar pomeni, da je $-1 \leq x \leq 1$ in $y = 0$. Očitno za vsako naravno število n velja $-n \leq -1$ in $1 < 1 + \frac{1}{n}$ ter posledično $-n \leq -1 \leq x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$. Prav tako za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja $-\frac{1}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{n}$. S tem smo pokazali, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ element (x,y) pripada množici A_n, zato je $(x,y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Ker torej velja tudi druga inkluzija, je enakost množic dokazana.

3. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 + 2^{-n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve natančno utemelji z dokazi!

4. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \ \mid \ e^{-n} \leq x < 1 + \frac{1}{n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

5. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3^{-n} < x < 3 + \frac{2}{n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

6. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \ \mid \ \frac{1}{2^n} \leq x < n\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

7. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{2^n} < x < 3n\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazom!

8. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

9. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} < x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

10. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n^2 x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

(a) Skiciraj množice A_1, A_2 in A_3.

(b) Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Za en odgovor zapiši tudi dokaz, da je resničen.

11. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = [0, n]$. Izračunaj

(a) $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n > m} A_n \right)$

(b) $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n > m} A_n \right)$

Pri tem naj bodo sklepi utemeljeni.

12. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

13. Naj bo I poljubna neprazna množica. Za vsak $i \in I$ naj bosta A_i in B_i množici. Dokaži, da velja

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i).$$

14. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \frac{x}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

15. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 3 - \frac{1}{n} \;\wedge\; \frac{1}{n} \leq y < 2n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

Poglavje 2

Funkcije

V tem poglavju najprej ponovimo osnovne vsebine o funkcijah, ki so bile na kratko obravnavane že v prvem semestru. Nato sledijo izpitne in kolokvijske naloge, ki povezujejo pojme o množicah in funkcijah. V drugem podpoglavju so zbrane naloge, ki zahtevajo konstrukcijo bijektivne funkcije med danima množicama. Opomnimo, da je teorija prvega podpoglavja večinoma vzeta iz vira [2].

2.1 Osnovne lastnosti funkcij

Naj bosta A, B množici. *Funkcija* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko en element množice B. Če funkcija f elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, rečemo, da je b *slika* elementa a in pišemo $b = f(a)$. Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico B pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* funkcije f je definirana kot

$$Z_f = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Naj bo $X \subseteq A$. *Slika* množice X je definirana kot

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Naj bo $Y \subseteq B$. *Praslika* množice Y je definirana kot

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : C \to D$ takšni funkciji, da je $B \subseteq C$. Funkcija $g \circ f : A \to D$, ki je definirana s predpisom $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za vsak $a \in A$, se imenuje *kompozitum* funkcij f in g.

Funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za poljubna dva elementa a_1, a_2 iz množice A velja: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Zadnjo izjavo lahko ekvivalentno zapišemo tudi kot: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če za poljuben element $b \in B$ obstaja $a \in A$, tako da velja $b = f(a)$.

Funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Naj bo $f : A \to B$ bijektivna funkcija. Potem definiramo njej *inverzno funkcijo* $f^{-1} : B \to A$ na naslednji način: za poljuben $b \in B$ naj bo $a \in A$ tak enolično določen element, da je $f(a) = b$. Potem je $f^{-1}(b) = a$.

Sedaj, ko smo ponovili pojem funkcije, lahko definiramo produkt množic za poljubno družino množic (podobno, kot smo to naredili za unijo in presek). Naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ družina množic, kjer je I neka indeksna množica. Potem definiramo *produkt* množic iz $\mathcal{A}$ na naslednji način:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}.$$

V posebnem primeru, ko za vsak $i \in I$ velja $A_i = A$, pišemo kar

$$\prod_{i\in I} A_i = A^I = \{f : I \to A \mid f \text{ je funkcija}\}.$$

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Naj bodo A, B in C podmnožice množice X in naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Dokaži, da velja
$$f(A \cap B \cap C) \subseteq f(A) \cap f(B) \cap f(C).$$
Dokaži tudi, da enakost med množicami v zgornji formuli ne velja v splošnem, velja pa v primeru, ko je funkcija f injektivna.

   Rešitev. *Naj bo $y \in f(A \cap B \cap C)$ poljuben element. Zato obstaja tak element $x \in A \cap B \cap C$, da velja $y = f(x)$. Od tod dobimo, da je $x \in A$, $x \in B$ in $x \in C$*

ter posledično $f(x) \in f(A)$, $f(x) \in f(B)$ in $f(x) \in f(C)$. To seveda pomeni, da je $f(x) = y \in f(A) \cap f(B) \cap f(C)$, kar zaključuje dokaz prvega dela.

Naj bo sedaj $X = Y = \mathbb{R}$, $A = B = [0,1]$, $C = [-1,0]$ in funkcija f definirana s predpisom $f(x) = x^2$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Opazimo, da je $f(A \cap B \cap C) = f(\{0\}) = \{0\}$ in $f(A) \cap f(B) \cap f(C) = [0,1]$, zato enakost ne velja v splošnem.

Na koncu spet predpostavimo, da so A, B in C poljubne podmnožice od X in da je f neka injektivna funkcija. Dokažimo, da v tem primeru velja tudi druga inkluzija: $f(A) \cap f(B) \cap f(C) \subseteq f(A \cap B \cap C)$. V ta namen izberimo poljuben element $y \in f(A) \cap f(B) \cap f(C)$. To seveda pomeni $y \in f(A)$, $y \in f(B)$ in $y \in f(C)$, zato obstajajo taki elementi $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ in $x_3 \in C$, da velja $y = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Ker pa je funkcija f injektivna, iz tega sledi $x_1 = x_2 = x_3$, zato je $x_1 \in A \cap B \cap C$ in posledično $y = f(x_1) \in f(A \cap B \cap C)$. V primeru, ko je funkcija f injektivna, v zapisani formuli torej velja enakost množic.

2. Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \to Y$ surjektivna funkcija.

   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico B množice Y velja $f(f^{-1}(B)) = B$.

   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za vsak $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F injektivna funkcija.

Opomba: za $g : X \to Y$ in $Z \subseteq Y$ je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

Rešitev. *Primer (a): Naj bo B poljubna podmnožica množice Y. Enakost množic bomo spet dokazali tako, da bomo posebej razmislili o veljavnosti obeh inkluzij.*

Najprej pokažimo, da velja $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. S tem namenom izberimo poljuben element $y \in f(f^{-1}(B))$. Po definiciji slike vemo, da mora obstajati tak element $x \in f^{-1}(B)$, da velja $y = f(x)$. Ker je $x \in f^{-1}(B)$, nam definicija praslike da $f(x) \in B$. Če združimo vse ugotovljeno, dobimo $y = f(x) \in B$, s čimer smo dokazali prvo inkluzijo.

Ostane nam še dokaz druge inkluzije: dokazati moramo, da velja $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. Naj bo $y \in B$ poljuben element. Ker je $B \subseteq Y$, seveda velja tudi $y \in Y$. V navodilu naloge je podano, da je funkcija f surjektivna, zato obstaja tak element $x \in X$, da je $y = f(x)$. Ker velja $f(x) = y \in B$, po definiciji praslike dobimo $x \in f^{-1}(B)$. To seveda implicira $f(x) \in f(f^{-1}(B))$. S tem smo pokazali, *da $y = f(x)$ pripada množici $f(f^{-1}(B))$, kar zaključi dokaz druge inkluzije in posledično tudi enakosti množic.*

Primer (b): Ker dokazujemo, da je funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ injektivna, moramo pokazati, da za vsaki dve podmnožici B_1 in B_2 množice Y velja: če je $F(B_1) = F(B_2)$, potem je $B_1 = B_2$.

Izberimo torej poljubni množici $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$, za kateri je $F(B_1) = F(B_2)$. Z upoštevanjem predpisa funkcije F nato dobimo $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$. Če množici na obeh straneh zadnje enakosti preslikamo s funkcijo f, nam to da $f(f^{-1}(B_1)) = f(f^{-1}(B_2))$. Ker je funkcija f surjektivna, iz primera (a) vemo, da je $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$ in $f(f^{-1}(B_2)) = B_2$, zato velja tudi $B_1 = B_2$. S tem je dokaz injektivnosti zaključen.

3. Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \to Y$ injektivna funkcija.
   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico A množice X velja $f^{-1}(f(A)) = A$.
   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F surjektivna funkcija.

4. Dana je funkcija $f : A \to B$. Naj bo K neprazna množica in naj bo za vsak $k \in K$ množica B_k podmnožica od B. Dokaži, da velja:
$$f^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) = \bigcup_{k \in K} f^{-1}\left(B_k\right)$$

5. Dana je funkcija $f : X \to Y$. Naj bosta A in B podmnožici od Y. Dokaži, da velja:
$$f^{-1}\left(A \setminus B\right) = f^{-1}\left(A\right) \setminus f^{-1}\left(B\right).$$

6. Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

7. Podani sta funkcija $f : X \to Y$ in neprazna množica K. Za vsak $k \in K$ naj bo A_k podmnožica od X. Dokaži, da velja
$$f\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) \subseteq \bigcap_{k \in K} f(A_k).$$

   Dokaži tudi, da enakost med množicama v zgornji formuli ne velja v splošnem, velja pa v primeru, ko je funkcija f injektivna.

2.2 Iskanje bijekcij

Pravimo, da ima množica A *enako moč* kot množica B, če obstaja bijekcija $f : A \to B$. V tem primeru pišemo $|A| = |B|$, rečemo pa tudi, da sta množici A in B *ekvipolentni.*

V tem razdelku so zbrane naloge, kjer je potrebno za dve dani množici poiskati bijektivno funkcijo, ki slika med njima. S tem torej pokažemo, da imata dani množici enako moč.

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $[0, 1) \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$. Utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

   Rešitev. *Če v ravnini narišemo skico množice $A = [0, 1) \times \mathbb{Z}$, opazimo, da je sestavljena iz več kopij intervala $[0, 1)$. Funkcijo $f : A \to \mathbb{R}$ bomo zato definirali tako, da bomo te kopije po vrsti preslikali na realno os. Za vsak par $(x, k) \in A$ tako definiramo*

   $$f(x, k) = x + k,$$

   kar seveda pripada množici $\mathbb{R}$. Sedaj je potrebno dokazati, da je tako definirana funkcija f bijekcija.

   Dokažimo najprej, da je injektivna. Zato izberimo poljubna dva elementa (x_1, k_1), $(x_2, k_2) \in A$, za katera je $f(x_1, k_1) = f(x_2, k_2)$. Od tod sledi $x_1 + k_1 = x_2 + k_2$ in posledično $x_1 - x_2 = k_2 - k_1$. Ker sta $x_1, x_2 \in [0, 1)$, je $x_1 - x_2 \in (-1, 1)$. Po drugi strani pa vemo, da je $k_2 - k_1 \in \mathbb{Z}$, zato je edina možnost, da velja $x_1 - x_2 = k_2 - k_1 = 0$, od koder sledi $(x_1, k_1) = (x_2, k_2)$. Funkcija f torej je injektivna.

   Ostane nam še dokaz surjektivnosti. V ta namen izberimo poljuben element $y \in \mathbb{R}$. Poiskati moramo tak par $(x, k) \in A$, da bo veljalo $f(x, k) = y$.

   Če se spomnimo, kako smo funkcijo f sploh definirali, ugotovimo, da je smiselno obravnavati celi del števila y, ki ga označimo kot $[y]$. Število $[y]$ je definirano kot največje celo število, ki je manjše ali enako y. Prav tako definiramo ostanek kot $o = y - [y]$. Naj bo sedaj $k = [y] \in \mathbb{Z}$ in $x = o \in [0, 1)$. Potem je $(x, k) \in A$ in

   $$f(x, k) = f(o, [y]) = o + [y] = y.$$

   S tem smo dokazali, da je funkcija f tudi surjektivna in zato bijektivna.

2. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija. Množici A in B tudi skiciraj.

Rešitev. *Opazimo, da množico A sestavljajo vse točke v ravnini, ki ležijo nad krivuljo z enačbo $y = e^x$. Podobno je B množica vseh točk, ki ležijo pod to krivuljo. Bijekcijo bomo konstruirali tako, da bomo za poljubno točko iz množice A najprej izračunali razdaljo do točke na krivulji, ki ima enako absciso kot izbrana točka. Nato bomo to razdaljo prenesli na drugo stran krivulje in tako dobili sliko izbrane točke.*

Naj bo torej (x, y) poljubna točka iz množice A. Razdalja te točke do točke (x, e^x) očitno znaša $d = y - e^x$. Funkcijo $f : A \to B$ definiramo tako, da za vsak $(x, y) \in A$ velja

$$f(x, y) = (x, e^x - d) = (x, 2e^x - y).$$

Ker točka (x, y) pripada množici A, je $y > e^x$ in posledično $2e^x - y < e^x$. To pomeni, da točka $(x, 2e^x - y)$ pripada množici B. S tem smo se prepričali, da naša funkcija res slika iz množice A v množico B.

Sedaj dokažimo, da je funkcija f injektivna. Zato izberimo poljubna dva elementa $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, za katera je $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Vemo torej, da velja $(x_1, 2e^{x_1} - y_1) = (x_2, 2e^{x_2} - y_2)$. Zato dobimo $x_1 = x_2$ in $2e^{x_1} - y_1 = 2e^{x_2} - y_2$. Če prvo enakost upoštevamo v drugi, dobimo še $y_1 = y_2$ in posledično $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. S tem smo pokazali, da je f injektivna.

Za konec nam ostane še dokaz surjektivnosti funkcije f. Izberimo torej poljuben element (a, b) iz množice B. Sedaj iščemo tak element (x, y) v množici A, da bo veljalo $f(x, y) = (a, b)$. Z upoštevanjem predpisa funkcije f dobimo enačbo $(x, 2e^x - y) = (a, b)$, kar implicira $x = a$ in $2e^x - y = b$, posledično pa tudi $y = 2e^a - b$. Preverimo torej, da je $(x, y) = (a, 2e^a - b)$ iskana točka.

Ker je (a, b) v množici B, mora veljati $b < e^a$. Od tod sledi tudi $2e^a - b > e^a$ in zato je točka $(x, y) = (a, 2e^a - b)$ v množici A. Na koncu preverimo še, da res velja

$$f(x, y) = f(a, 2e^a - b) = (a, 2e^a - (2e^a - b)) = (a, b).$$

S tem smo dokazali, da je funkcija f surjektivna in zato tudi bijektivna.

3. Naj bo $A = (0,1] \times \mathbb{N}$ in $B = (1,\infty)$. Skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

5. Naj bo $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ in $B = \mathbb{R}\times\{0,1\}$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

6. Naj bo $A = \mathbb{R} \times [0,2]$ in $B = [0,4] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

7. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ in $B = (-1,1) \times (-1,1)$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter dokaži, da je opisana funkcija res bijekcija.

8. Naj bo $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0,1]$ in $B = \mathbb{R} \times [0,2]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

9. Naj bo $A = [0,2] \times (0,1)$ in $B = (0,2) \times [0,1]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

10. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0,2)$ ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

11. Naj bo $A = [0,1] \times \mathbb{N}$ in $B = (1,\infty)$. Skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

12. Naj bo $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ in $B = L \times (-\infty, 2)$, kjer je L množica vseh lihih naravnih števil. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

13. Naj bo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$ in $B = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

14. Naj bo $A = (0,\infty)\times\{1,2\}$ in $B = \mathbb{R}$. V ravnini skiciraj množico A in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

15. Naj bo
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\wedge\; y = \frac{1}{x}\right\} \text{ in } B = \mathbb{R}.$$
Skiciraj množico A in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

16. Naj bo
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\wedge\; y = \frac{1}{x}\right\} \text{ in } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}.$$
Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

17. Naj bo $A = (-1, 1) \times S$ in $B = \mathbb{N} \times (2, 6)$, kjer je S množica vseh sodih naravnih števil. V ravnini skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

18. Naj bo $A = (0, \infty) \times \mathbb{N}$ in $B = \mathbb{Z} \times (0, 4)$. V ravnini skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

Poglavje 3

Števne množice

Množica A je *končna*, če je $A = \emptyset$ ali če obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da ima A enako moč kot množica $\{1, 2, \ldots, n\}$. Če množica ni končna, pravimo, da je *neskončna*.

Množica A je *števna*, če je končna ali če ima enako moč kot množica naravnih števil $\mathbb{N}$. V drugem primeru rečemo, da je A *števno neskončna*. Primeri števno neskončnih množic so $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Izkaže se, da so za poljubno neprazno množico A naslednje tri trditve ekvivalentne:

1. A je števna.
2. Obstaja surjektivna funkcija, ki slika iz množice $\mathbb{N}$ v množico A.
3. Obstaja injektivna funkcija, ki slika iz množice A v množico $\mathbb{N}$.

Velja tudi naslednje:

- Predpostavimo, da je množica I števna in da je za vsak $i \in I$ množica A_i števna. Potem je tudi množica $\bigcup_{i \in I} A_i$ števna.
- Predpostavimo, da je $n \in \mathbb{N}$ in da so množice $A_1, A_2 \ldots, A_n$ števne. Potem je tudi množica $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ števna.

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.

   Rešitev: *Opazimo, da ima dana množica* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *enako moč kot množica* $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *To dokažemo tako, da konstruiramo bijekcijo* $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^4$. *Za vsako matriko* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *definiramo*

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}),$$

   kar seveda pripada množici $\mathbb{Z}^4$. *Dokazati je potrebno, da je funkcija* f *injektivna. Naj bosta torej*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

   poljubni matriki, da velja $f(A) = f(B)$. *Od tod takoj sledi* $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$, *kar nam da* $a_{ij} = b_{ij}$ *za vsaka* $i, j \in \{1, 2\}$. *Dobimo torej* $A = B$, *kar pomeni, da je* f *injektivna.*

   Dokažimo še, da je f *surjektivna funkcija. Naj bo* $(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4$ *poljuben element. Če definiramo*

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

   bo očitno veljalo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *in* $f(A) = (x, y, z, w)$. *S tem smo dokazali, da je* f *bijekcija.*

   Znano dejstvo je, da je množica $\mathbb{Z}$ *števna, zato je tudi množica* $\mathbb{Z}^4$ *števna. Ker ni končna, obstaja bijektivna funkcija* $g : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{N}$. *To pomeni, da je funkcija* $g \circ f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}$ *bijekcija. Posledično je množica* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *števno neskončna in zato števna.*

   Opomba: zadoščalo bi dokazati le, da je zgoraj definirana funkcija f *injektivna. Namreč, ker je množica* $\mathbb{Z}^4$ *števna, obstaja injektivna funkcija* $h : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{N}$, *zato je funkcija* $h \circ f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}$ *injektivna. To pa že dokazuje, da je množica* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *števna.*

2. Naj bo B množica vseh možnih besed (torej množica vseh možnih končnih nizov), ki jih lahko sestavimo iz črk slovenske abecede. Ali je množica B števna? Odgovor utemelji z dokazom!

   Rešitev. *Dokazali bomo, da je množica B števna. Videli bomo namreč, da lahko množico B zapišemo kot števno unijo števnih množic.*

   V ta namen za vsak $n \in \mathbb{N}$ z B_n označimo množico vseh besed dolžine n, ki jih lahko sestavimo iz črk slovenske abecede. Ker ima slovenska abeceda 25 črk, s pomočjo pravila produkta iz kombinatorike zlahka vidimo, da za poljubno naravno število n množica B_n vsebuje natanko 25^n različnih besed. Za vsako izmed n mest imamo namreč na razpolago natanko 25 različnih možnosti. To pomeni, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica B_n končna in zato tudi števna.

   Ker seveda predpostavimo, da vsaka beseda vsebuje vsaj eno črko, hitro opazimo, da velja

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

   To utemeljimo tako: če izberemo poljubno besedo $b \in B$, je le-ta sestavljena iz končno mnogo črk. Zato obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $b \in B_n$. Tako vidimo, da velja $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

   Po drugi strani za poljuben $b \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ spet obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $b \in B_n$. Ker je očitno $B_n \subseteq B$, bo beseda b pripadala množici B. S tem smo premislili obe inkluziji, zato res velja zgoraj zapisana enakost.

   Ugotovili smo torej, da je množica B števna unija števnih množic, zato je po izreku s predavanj tudi sama števna (glej teorijo na začetku poglavja).

3. Ali je množica vseh kvadratnih polinomov z racionalnimi koeficienti števna množica? Odgovor utemelji!

4. Naj oznaka $K_r(x, y)$ predstavlja krožnico v $\mathbb{R}^2$ s središčem v točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in polmerom r. Dokaži, da je množica $\mathcal{K} = \{K_r(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}^+\}$ števna množica.

5. Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh matrik (vseh možnih dimenzij) z racionalnimi koeficienti. Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

6. Naj bo

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ (x^{23} - 2x^{10} + 5x)^n + 2x^2 - 3 = 0 \right\}.$$

Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

7. Podana je množica

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{obstaja } n \in \mathbb{N}, \text{ tako da velja } \cos(nx) = 0\}.$$

Ali je množica A števna? Odgovor utemelji z dokazom!

8. Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Vsako izmed naslednjih dveh trditev dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi:

   (a) Če je množica A števna, je tudi $f(A)$ števna.

   (b) Če je množica B števna, je tudi $f^{-1}(B)$ števna.

Poglavje 4

Ekvivalenčne relacije in kardinalna števila

V tem poglavju se ukvarjamo s kardinalnimi števili. Da jih lahko vpeljemo, potrebujemo najprej pojem relacije.

Relacije

Binarna relacija R na množici A je podmnožica kartezičnega produkta $A \times A$. Kadar za neka elementa $a, b \in A$ velja, da je $(a, b) \in R$, rečemo, da je *a v relaciji R z b* in pišemo aRb.

Pravimo, da je binarna relacija R

- *refleksivna*, če za vsak $a \in A$ velja: aRa,
- *simetrična*, če za vsaka $a, b \in A$ velja: $aRb \Rightarrow bRa$,
- *antisimetrična*, če za vsaka $a, b \in A$ velja: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
- *tranzitivna*, če za vse $a, b, c \in A$ velja: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,
- *sovisna*, če za vsaka $a, b \in A$ velja: $aRb \vee bRa$.

Če je relacija R refleksivna, simetrična in tranzitivna, potem jo imenujemo *ekvivalenčna relacija*. Izkaže se, da v tem primeru množica A razpade na ekvivalenčne razrede. Natančneje, *ekvivalenčni razred* elementa $a \in A$ definiramo kot

$$[a]_R = \{b \in A \mid bRa\}.$$

Zlahka vidimo, da če sta elementa $a_1, a_2 \in A$ v relaciji, potem njuna ekvivalenčna razreda sovpadata: v takem primeru je torej $[a_1]_R = [a_2]_R$. Če elementa nista v relaciji, sta njuna ekvivalenčna razreda disjunktna.

Množica vseh ekvivalenčnih razredov, ki jo označimo z A_R, se imenuje *kvocientna množica* ali tudi *faktorska množica*. Zapišemo jo lahko tako:

$$A_R = \{[a]_R \mid a \in A\}\,.$$

Kardinalna števila

Relacija *biti enako močen* je ekvivalenčna relacija na razredu vseh množic, zato letega razbije na ekvivalenčne razrede. Ekvivalenčni razred neke množice glede na to relacijo se imenuje *kardinalno število* oziroma *moč množice*. Kardinalno število neke množice A bomo označili kot $|A|$. Seveda pišemo $|\emptyset| = 0$, prav tako za vsak $n \in \mathbb{N}$ označimo $|\{1, 2, \ldots, n\}| = n$. Uporabljata se tudi oznaki $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (beremo *alef nič*) in $|\mathbb{R}| = c$. Za množico, ki ima enako moč kot množica realnih števil $\mathbb{R}$, rečemo, da ima *moč kontinuuma*.

Za kardinalna števila vpeljemo tudi operacije seštevanja, množenja in potenciranja [4]. Preden zapišemo definicije, se spomnimo, da za poljubni množici A in B označimo:

$$A^B = \{f : B \to A \mid f \text{ je funkcija}\}.$$

Naj bosta $a = |A|$ in $b = |B|$ kardinalni števili, kjer sta A in B disjunktni množici. Potem definiramo:

1. $a + b = |A \cup B|$,
2. $a \cdot b = ab = |A \times B|$,
3. $a^b = |A^B|$.

Izkaže se, da so vse tri definicije dobre (torej neodvisne od izbire predstavnika ekvivalenčnega razreda).

Za poljubna kardinalna števila a, b, c velja: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$, $(ab)c = a(bc)$, $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$, $(ab)^c = a^c b^c$, $a^b a^c = a^{b+c}$, $(a^b)^c = a^{bc}$.

Če je $a = |A|$ poljubno kardinalno število, potem je $2^a = |\mathcal{P}(A)|$. Velja pa tudi naslednja zveza med $\aleph_0$ in c: $2^{\aleph_0} = c$.

Naj bosta $a = |A|$ in $b = |B|$ kardinalni števili. Potem je $a \leq b$ natanko tedaj, ko obstaja injektivna funkcija $f : A \to B$. Po definiciji velja še $a < b$ natanko tedaj, ko je $a \leq b$ in $a \neq b$.

Naj bodo a, b, c poljubna kardinalna števila, tako da je $a \leq b$. Potem velja: $a + c \leq b + c$, $ac \leq bc$, $a^c \leq b^c$. V kolikor je $c \neq 0$, pa velja še $c^a \leq c^b$.

Med drugim so znane tudi naslednje trditve:

- $\aleph_0 < c$,
- za poljubno množico A velja $|A| < |\mathcal{P}(A)|$,
- za poljubno kardinalno število a velja $a < 2^a$,
- izrek Cantor-Schroeder-Bernstein: za poljubni kardinalni števili a, b velja: $a \leq b \ \wedge \ b \leq a \Rightarrow a = b$.

Pri računanju s kardinalnimi števili nam bosta večkrat prav prišli tudi naslednji lastnosti:

- če je $1 \leq k \leq \aleph_0$, potem je $k + \aleph_0 = k \cdot \aleph_0 = \aleph_0$,
- če je $1 \leq k \leq c$, potem je $k + c = k \cdot c = c$.

4.1 Naloge iz kardinalnih števil

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{R}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

Rešitev. *<u>Množica A:</u> Opazimo, da lahko množico A zapišemo tudi kot* $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. *Ker vemo, da je* $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ *in* $\aleph_0 \cdot c = c$, *dobimo*

$$\begin{aligned} |A| &= |\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}| \\ &= |\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{Z}| \cdot |\mathbb{Q}| \cdot |\mathbb{R}| \\ &= \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot c \\ &= c. \end{aligned}$$

<u>Množica B:</u> Vsako zaporedje (x_n) *z elementi iz množice A je dejansko funkcija* $x : \mathbb{N} \to A$. *Zato lahko zapišemo*

$$B = \{x : \mathbb{N} \to A \mid x \text{ je funkcija}\} = A^{\mathbb{N}}.$$

To nam da

$$|B| = \left|A^{\mathbb{N}}\right| = |A|^{|\mathbb{N}|} = c^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c,$$

pri čemer smo dvakrat uporabili znano zvezo $2^{\aleph_0} = c$.

<u>Množica C:</u> Ker je C množica vseh podmnožic množice A, je to kar potenčna množica množice A, torej $C = \mathcal{P}(A)$. *Zato dobimo*

$$|C| = |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^c.$$

Ugotovili smo torej, da velja $c = |A| = |B| < |C| = 2^c$.

2. (a) Dana je množica $A = \{7n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Izračunaj moč množice $B = A \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$ in odgovor utemelji z dokazom.

   (b) Dokaži, da za poljubna kardinalna števila a, b in c velja:
   $a < b \ \wedge \ b < c \Rightarrow a < c$.

Rešitev. *<u>Primer (a):</u> Najprej dokažimo, da ima množica A enako moč kot množica naravnih števil. To bomo seveda naredili tako, da bomo opisali bijekcijo, ki slika med tema dvema množicama.*

Naj bo torej funkcija $f : \mathbb{N} \to A$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *definirana s predpisom* $f(n) = 7n - 2$. *Očitno je pri poljubnem* $n \in \mathbb{N}$ *število* $f(n)$ *res v množici A. Pokažimo najprej, da je f injektivna funkcija. S tem namenom izberimo poljubna elementa*

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, ki pa sta takšna, da velja $f(n_1) = f(n_2)$. Od tod dobimo $7n_1 - 2 = 7n_2 - 2$, zato je tudi $n_1 = n_2$. Funkcija f torej je injektivna.

Za dokaz surjektivnosti izberimo poljuben element $k \in A$. Po definiciji množice A mora obstajati tak $n \in \mathbb{N}$, da je $k = 7n-2$. Zato seveda sledi $f(n) = 7n-2 = k$. Funkcija f je torej tudi surjektivna, zato je res bijekcija.

Ugotovili smo torej, da velja $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Preden nadaljujemo z množico B, razmislimo o moči množice $\mathbb{R}^+$. Ker je $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, očitno obstaja injektivna funkcija $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (za poljuben $x \in \mathbb{R}^+$ definiramo $g(x) = x$) in zato velja $|\mathbb{R}^+| \leq |\mathbb{R}| = c$. Po drugi strani vemo, da je $|(0,1)| = c$ in da velja $(0,1) \subseteq \mathbb{R}^+$, zato je $|\mathbb{R}^+| \geq c$. Po izreku Cantor-Schroeder-Bernstein tako dobimo $|\mathbb{R}^+| = c$.

Končno lahko določimo še moč množice B:

$$\begin{aligned}
|B| &= \left|A \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+\right| \\
&= |A| \cdot |\mathbb{Z}| \cdot \left|\mathbb{R}^+\right| \\
&= \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot c \\
&= c.
\end{aligned}$$

<u>Primer (b):</u> Naj bodo A, B in C takšne množice, da je $a = |A|$, $b = |B|$ in $c = |C|$. Prav tako naj velja $a < b$ in $b < c$.

Ker je $a < b$, je tudi $a \leq b$, zato obstaja injektivna funkcija $f : A \to B$. Podobno ugotovimo, da obstaja injektivna funkcija $g : B \to C$. Kompozitum teh dveh funkcij, $g \circ f : A \to C$, je potem seveda tudi injektivna funkcija, zato imamo $a = |A| \leq |C| = c$. Če torej dokažemo še, da velja $a \neq c$, bo dokaz zaključen. Napravili bomo dokaz s protislovjem.

Pa recimo, da je $|A| = |C|$. Potem vemo, da mora obstajati bijektivna funkcija $h : A \to C$. Seveda je zato tudi inverzna funkcija $h^{-1} : C \to A$ bijektivna in posledično injektivna. To implicira dejstvo, da je tudi funkcija $f \circ h^{-1} : C \to B$ injektivna, zato velja $c = |C| \leq |B| = b$. Po drugi strani pa že od prej vemo, da je $b \leq c$. Po izreku Cantor-Schroeder-Bernstein sedaj dobimo $b = c$, kar je v nasprotju z začetno predpostavko. S tem smo dokazali, da res velja $a < c$.

3. Dani sta množici $A = \{7n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $B = A \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$. Naj bo še C množica vseh podmnožic množice B. Izračunaj moči množic A, B, C in jih

primerjaj po velikosti. Ali je katera od teh množic števna? Vse sklepe utemelji z dokazi!

4. Podana je množica $A = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Naj bo še B množica vseh podmnožic množice A ter C množica vseh funkcij, ki slikajo iz $\mathbb{R}$ v A. Izračunaj moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti. Ali je katera od teh množic števna? Vse sklepe utemelji z dokazi!

5. Naj bo A množica vseh matrik velikosti 2×2, katerih diagonalna elementa sta celi števili, preostala dva elementa pa realni števili. Določi moč množice A. Ali je množica A števna? Svoje trditve dokaži!

6. Določi moč množice A, ki vsebuje vse linearne funkcije f s predpisom $f(x) = kx + n$, katerih začetna vrednost n je celo število, smerni koeficient k pa racionalno število. Ali je množica A števna? Dokaži svoje trditve!

7. Določi moči množic A in B ter ju primerjaj po velikosti:

   A: množica vseh funkcij $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere obstajajo $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{N}$ in $d \in \mathbb{Q}^+$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

   B: množica vseh podmnožic množice A.

   Ali je katera od množic A oziroma B števna? Svoje trditve utemelji z dokazi!

8. Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   A - množica vseh polinomov p s predpisom $p(x) = ax^2 + bx + c$, kjer je $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

9. Določi moči množic A, B, C, D ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{N}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to A$.

   D - množica vseh podmnožic množice A.

10. Določi moči množic A, B, C in svoje trditve utemelji z dokazi:

A: množica vseh matrik velikosti 2×2, katerih diagonalna elementa sta racionalni števili, preostala dva elementa pa celi števili.

B: množica vseh podmnožic množice A.

C: množica vseh zaporedij elementov iz množice B.

11. Določi moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti:

    A: množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere obstajata $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ in $k \in \mathbb{Z}$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = kx + n$.

    $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \ \wedge \ y = \frac{1}{x^2}\}$.

    C: množica vseh funkcij, ki slikajo iz B v A.

    Vse trditve natančno utemelji z dokazi!

12. Določi moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti:

    A: množica vseh funkcij $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere obstajajo $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Q}^+$, $c \in [0, 1]$ in $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

    B: množica vseh zaporedij elementov iz množice A.

    C: množica vseh funkcij, ki slikajo iz B v $\mathbb{Q}$.

    Svoje trditve utemelji z dokazi!

13. Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 4\}$. Skiciraj množici A in B v ravnini ter s pomočjo kardinalne aritmetike pokaži, da je $|A| = |B|$. Vse korake utemelji z dokazi!

14. Podani sta naslednji podmnožici množice $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x - 1\}$ in $B = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \mid y < x\}$. Skiciraj množici A in B ter s pomočjo kardinalne aritmetike pokaži, da je $|A| = |B|$. Vse korake utemelji z dokazi!

15. Naj bo A množica vseh podmnožic od $\mathbb{R}$, ki vsebujejo množico $\mathbb{N}$ ter B množica vseh zaporedij kompleksnih števil. Določi moči množic A in B (pri tem odgovora utemelji) ter ju primerjaj po velikosti.

16. Določi moč množice vseh realnih 2×2 matrik, katerih determinanta je enaka 1. Odgovor utemelji z dokazom!

17. Naj bodo a, b in c kardinalna števila in naj bo $c \neq 0$. Dokaži, da velja:

$$a \leq b \Longrightarrow c^a \leq c^b.$$

4.2 Naloge, ki povezujejo ekvivalenčne relacije in kardinalna števila

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - 3x_1 = y_2 - 3x_2.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in v ravnini skiciraj ekvivalenčna razreda $[(0,0)]$ in $[(1,4)]$. Določi še moč ekvivalenčnega razreda $[(0,0)]$ in svoj odgovor dokaži.

Rešitev. *Najprej dokažimo, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija:*

(i) *Refleksivnost: naj bo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ poljuben element. Potem seveda velja $y - 3x = y - 3x$, zato je $(x,y) \sim (x,y)$.*

(ii) *Simetričnost: naj bosta $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ poljubna elementa, tako da je $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$. Od tod sledi $y_1 - 3x_1 = y_2 - 3x_2$, kar implicira $y_2 - 3x_2 = y_1 - 3x_1$, zato velja $(x_2,y_2) \sim (x_1,y_1)$.*

(iii) *Tranzitivnost: naj bodo $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$ poljubni elementi, tako da je $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ in $(x_2,y_2) \sim (x_3,y_3)$. Od tod sledi $y_1 - 3x_1 = y_2 - 3x_2$ in $y_2 - 3x_2 = y_3 - 3x_3$, kar implicira $y_1 - 3x_1 = y_3 - 3x_3$, zato velja $(x_1,y_1) \sim (x_3,y_3)$.*

Sedaj zapišimo oba ekvivalenčna razreda:

$$\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \sim (0,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 3x = 0 - 3 \cdot 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\},
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
[(1,4)] &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \sim (1,4)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 3x = 4 - 3 \cdot 1\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\}.
\end{aligned}$$

Opazimo, da ekvivalenčna razreda predstavljata premici s smernim koeficientom 3: prva gre skozi izhodišče, druga pa ima začetno vrednost 1.

Hitro ugotovimo, da ima množica $[(0,0)]$ *enako moč kot množica* $\mathbb{R}$*. To dokažemo tako, da najdemo bijektivno funkcijo* $f : \mathbb{R} \to [(0,0)]$*. Za vsak* $x \in \mathbb{R}$ *definiramo* $f(x) = (x, 3x)$*. Očitno je* $f(x) \in [(0,0)]$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}$*. Dokažimo še, da je* f *res bijekcija.*

Za dokaz injektivnosti izberimo poljubna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tako, da je* $f(x_1) = f(x_2)$*. Od tod sledi* $(x_1, 3x_1) = (x_2, 3x_2)$*, kar seveda implicira* $x_1 = x_2$*. Torej je* f *injektivna funkcija.*

Za dokaz surjektivnosti vzemimo poljuben element $(a,b) \in [(0,0)]$*. Očitno potem velja* $b = 3a$*. Sedaj opazimo* $f(a) = (a, 3a) = (a, b)$*. Torej obstaja tak element* $x = a \in \mathbb{R}$*, da je* $f(x) = (a,b)$*, zato je* f *surjektivna funkcija. S tem smo dokazali, da je* f *tudi bijektivna.*

Končno lahko sklenemo

$$|[(0,0)]| = |\mathbb{R}| = c.$$

2. Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0,1)$.

   (b) Določi moč množice $\mathbb{R}^2/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

Rešitev. *Primer (a): Najprej dokažimo, da je* $\sim$ *ekvivalenčna relacija:*

(i) Refleksivnost: naj bo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *poljuben element. Potem seveda velja* $x^2 + y = x^2 + y$*, zato je* $(x,y) \sim (x,y)$*.*

(ii) Simetričnost: naj bosta $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ *poljubna elementa, tako da je* $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$*. Od tod sledi* $x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2$*, kar implicira* $x_2^2 + y_2 = x_1^2 + y_1$*, zato velja* $(x_2,y_2) \sim (x_1,y_1)$*.*

(iii) Tranzitivnost: naj bodo $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$ *poljubni elementi, tako da je* $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ *in* $(x_2,y_2) \sim (x_3,y_3)$*. Od tod sledi* $x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2$ *in* $x_2^2 + y_2 = x_3^2 + y_3$*, kar implicira* $x_1^2 + y_1 = x_3^2 + y_3$*, zato velja* $(x_1,y_1) \sim (x_3,y_3)$*.*

S tem smo dokazali, da je $\sim$ res ekvivalenčna relacija. Če zapišemo ekvivalenčni razred

$$\begin{aligned}
[(0,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \sim (0,1)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0^2 + 1\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 1\},
\end{aligned}$$

ugotovimo, da v ravnini predstavlja parabolo z enačbo $y = -x^2 + 1$.

Primer (b): Pokazali bomo, da ima faktorska množica enako moč kot množica realnih števil. Zato bomo konstruirali bijekcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/_\sim$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ definiramo

$$f(x) = [(0,x)],$$

kar seveda je v množici $\mathbb{R}^2/_\sim$. Pokažimo najprej, da je funkcija f injektivna. Zato izberimo poljubna elementa $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, za katera velja $f(x_1) = f(x_2)$. Posledično dobimo $[(0,x_1)] = [(0,x_2)]$ in ker velja $(0,x_1) \in [(0,x_1)] = [(0,x_2)]$, je tudi $(0,x_1) \sim (0,x_2)$. Po definiciji relacije $\sim$ dobimo $0^2 + x_1 = 0^2 + x_2$, zato je $x_1 = x_2$. S tem smo dokazali, da je funkcija f injektivna.

Za dokaz surjektivnosti izberimo poljuben ekvivalenčni razred $[(a,b)] \in \mathbb{R}^2/_\sim$, kjer je $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Sedaj iščemo tak $x \in \mathbb{R}$, za katerega je $f(x) = [(a,b)]$. To pomeni, da mora veljati $[(0,x)] = [(a,b)]$ in posledično $(0,x) \sim (a,b)$, kar implicira $0^2 + x = a^2 + b$.

Naj bo torej $x = a^2+b$. Ker očitno velja $0^2+a^2+b = a^2+b$, je $(0,a^2+b) \sim (a,b)$ in zato sovpadata tudi ustrezna ekvivalenčna razreda: $[(0,a^2+b)] = [(a,b)]$. Tako dobimo

$$f(x) = f(a^2+b) = [(0,a^2+b)] = [(a,b)].$$

S tem smo dokazali, da je funkcija f surjektivna in posledično tudi bijektivna. Vidimo torej, da je $|\mathbb{R}^2/_\sim| = |\mathbb{R}| = c$.

3. Relacija $\sim$ na množici $A = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ je definirana s formulo:

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff y_1 - \ln x_1 = y_2 - \ln x_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in v ravnini skiciraj ekvivalenčna razreda $[(1,0)]$ in $[(e^2,3)]$.

(b) Določi moč ekvivalenčnega razreda $[(e^2, 3)]$ in svoj odgovor utemelji z dokazom.

4. Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \Longleftrightarrow \cos x - \cos y \in \mathbb{Z}.$$

(a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

(b) Ali je ekvivalenčni razred števila 0 števna množica?

(c) Dokaži, da množica $\mathbb{R}/_\sim$ ni števna.

5. Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^3$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter poimenuj in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 0, 1)$. Določi moč množice $\mathbb{R}^3/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

6. Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \Longleftrightarrow \sin(x - y) = 0.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred števila 0 in določi njegovo moč.

7. Relacija $\sim$ na množici vseh realnih 2×2 matrik $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ je definirana s formulo

$$A \sim B \Longleftrightarrow \det A = \det B.$$

(a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

(b) Ali je ekvivalenčni razred enotske matrike I števna množica?

(c) Določi moč množice $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/_\sim$.

8. Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}_3[X]$ vseh polinomov oblike $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ s koeficienti iz $\mathbb{R}$, je definirana s formulo

$$p \sim q \Longleftrightarrow p' = q',$$

kjer p' označuje odvod polinoma p, q' pa odvod polinoma q. Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred polinoma $p(x) = 1$ in določi njegovo moč.

9. Relacija $\sim$ na množici $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - \ln x_1 = y_2 - \ln x_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in v ravnini skiciraj ekvivalenčna razreda $[(1, 0)]$ in $[(e^2, 3)]$.

   (b) Določi moč kvocientne množice $A/_\sim$ in svoj odgovor utemelji z dokazom.

10. Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}^3$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff x_1 - y_1 + z_1 = x_2 - y_2 + z_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Zapiši tudi ekvivalenčna razreda $[(0, 0, 0)]$ in $[(0, 0, 1)]$. Kaj geometrijsko predstavljata ta dva ekvivalenčna razreda?

   (b) Določi moč kvocientne množice $\mathbb{R}^3/_\sim$ in svoj odgovor utemelji z dokazom.

Poglavje 5

Dobro urejene množice in ordinalna števila

V tem poglavju se najprej ukvarjamo z delno, linearno in dobro urejenimi množicami. V drugem delu nato obravnavamo še ordinalna števila. Več informacij najdemo na primer v literaturi [4].

5.1 Delno, linearno in dobro urejene množice

Naj bo R binarna relacija na množici A. Če je R refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, potem jo imenujemo *delna urejenost*, par (A, R) pa *delno urejena množica*. Velikokrat namesto R pišemo kar $\leq_A$ ali celo $\leq$ in zato namesto aRb pišemo $a \leq_A b$ ali kar $a \leq b$. V primeru, da za $a, b \in A$ velja $a \leq_A b$ in $a \neq b$, pišemo $a <_A b$ oziroma $a < b$. Delna urejenost $\leq_A$, ki je tudi sovisna, se imenuje *linearna urejenost*, par $(A, \leq_A)$ pa *linearno urejena množica*.

Naj bo $(A, \leq_A)$ linearno urejena množica in $S \subseteq A$ neprazna podmnožica. Element $m \in S$ je *minimum* množice S, če za vsak $s \in S$ velja $m \leq_A s$. Linearno urejena množica $(A, \leq_A)$, za katero velja, da ima vsaka neprazna podmnožica od A minimum, se imenuje *dobro urejena množica*.

Predpostavimo, da je $(A, \leq_A)$ linearno urejena množica in $x, y \in A$ takšna elementa, da je $x <_A y$. Potem pravimo, da je x *neposredni predhodnik* elementa y, če ne obstaja tak $z \in A$, za katerega je $x <_A z <_A y$. Če nek element $a \in A$ nima neposrednega predhodnika in ni minimum množice A, potem ga imenujemo *limitni element*.

Delno urejeni množici $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ sta *izomorfni*, če obstaja bijektivna funkcija $f : A \to B$, tako da za vsaka $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \leq_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$. V tem primeru pišemo $(A, \leq_A) \simeq (B, \leq_B)$, preslikavo f pa imenujemo *izomorfizem* delno urejenih množic $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$. Izkaže se, da če sta $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ linearno urejeni množici, je dovolj zahtevati obstoj bijektivne funkcije $f : A \to B$, tako da za vsaka $a_1, a_2 \in A$ velja: $a_1 \leq_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$.

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $f : (A, \leq) \longrightarrow (A, \leq)$ strogo naraščajoča funkcija (torej za vsaka $x, y \in A$ velja: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$). Dokaži, da za vsak $a \in A$ velja $a \leq f(a)$.
   Namig: obravnavaj množico $D = \{x \in A \mid x > f(x)\}$.

   Rešitev: *Naj bo $a \in A$ poljuben element. Dokazati želimo, da velja $a \leq f(a)$. Pa recimo, da to ni res. Ker je $(A, \leq)$ dobro urejena množica, sta v njej vsaka dva elementa primerljiva, zato v tem primeru sledi $a > f(a)$.*

   Definirajmo množico $D = \{x \in A \mid x > f(x)\}$, ki je podana v namigu. Takoj opazimo, da velja $a \in D$, zato množica D ni prazna. Ker je $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $D \subseteq A$, mora obstajati minimum množice D, ki ga označimo z m. Seveda je $m \in D$ in posledično $m > f(m)$. Ker je f strogo naraščajoča funkcija, od tod sledi $f(m) > f(f(m))$, kar pa pomeni, da je tudi $f(m) \in D$.

   Velja torej $m > f(m)$ in $f(m) \in D$, kar je v protislovju z dejstvom, da je m minimum množice D. Naša začetna predpostavka je torej bila napačna, zato lahko sklenemo, da je $a \leq f(a)$. S tem je dokaz zaključen.

2. Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $B \subseteq A$ takšna podmnožica od A, da za vsaka $a, b \in A$ velja: če je $a \leq b$ in $b \in B$, potem je $a \in B$. Dokaži, da je $B = A$ ali pa je B začetni interval v množici A.

   Opomba: B je začetni interval v množici A natanko takrat, ko za neki $x \in A$ velja $B = A_x = \{y \in A \mid y < x\}$.

   Rešitev. *Predpostavimo, da je $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $B \subseteq A$ takšna podmnožica, da za vsaka $a, b \in A$ velja: če je $a \leq b$ in $b \in B$, potem je $a \in B$. Ločimo dve možnosti.*

   Možnost 1. Če je $B = A$, potem je trditev, ki jo želimo dokazati, seveda resnična, zato smo v tem primeru končali.

Možnost 2. Če je $B \neq A$, potem množica $A \setminus B$ ni prazna. Ker je $(A, \leq)$ dobro urejena množica, mora obstajati minimum množice $A \setminus B$, ki ga označimo z m. Dokazali bomo, da velja $B = A_m$, kjer je $A_m = \{y \in A \mid y < m\}$. Oglejmo si posebej obe inkluziji.

Naj bo $b \in B$ poljuben element. Dokazati želimo, da je $b < m$. Predpostavimo nasprotno: recimo, da je $m \leq b$. Ker je $b \in B$ in $m \leq b$, mora po predpostavki naloge veljati $m \in B$. To je seveda protislovje, saj je m element množice $A \setminus B$. Zapisano pomeni, da res velja $b < m$ in posledično element b pripada množici A_m. S tem smo dokazali, da je $B \subseteq A_m$.

Za dokaz druge inkluzije vzemimo poljuben element $b \in A_m$. Vemo torej, da je $b < m$. Ker je m minimum množice $A \setminus B$ in $b < m$, sledi, da b ni element množice $A \setminus B$. To pomeni, da je $b \in B$. S tem smo dokazali še drugo inkluzijo.

Vidimo torej, da velja $B = A_m$, zato je v tem primeru množica B začetni interval v množici A.

3. Naj bo A množica vseh naravnih števil, ki so deljiva s 3, in $B = \mathbb{N} \setminus A$. Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ vpeljemo relacijo $\leq'$ na naslednji način:

   $$n \leq' m \Leftrightarrow (n \in A, m \in B) \vee (n, m \in A \text{ in } n \leq m) \vee (n, m \in B \text{ in } n \leq m),$$

   kjer je $\leq$ naravna ureditev na $\mathbb{N}$. Dokaži, da je $(\mathbb{N}, \leq')$ dobro urejena množica in poišči njene limitne elemente. Ali sta $(\mathbb{N}, \leq)$ in $(\mathbb{N}, \leq')$ izomorfni? Vse odgovore utemelji!

5.2 Ordinalna števila

Na razredu vseh linearno urejenih množic je relacija *biti izomorfen* ekvivalenčna relacija in zato le-tega razbije na ekvivalenčne razrede. Posamezni ekvivalenčni razred se imenuje *ordinalni tip*, ekvivalenčni razred dobro urejene množice pa *ordinalno število*.

Ordinalno število prazne množice skupaj s prazno relacijo bomo označili z 0, prav tako bomo za poljuben $n \in \mathbb{N}$ kar z istim simbolom n označevali ordinalno število množice $\{1, 2 \ldots, n\}$ skupaj s standardno ureditvijo. Ordinalno število, ki je ekvivalenčni razred naravnih števil (skupaj s standardno ureditvijo), označimo z ω. Za ordinalna števila vpeljemo tudi operaciji seštevanja in množenja [4].

Naj bosta $\alpha = [(A, \leq_A)]$ in $\beta = [(B, \leq_B)]$ ordinalni števili, kjer je $A \cap B = \emptyset$. Na množici $A \cup B$ vpeljemo relacijo $\leq$ tako, da za vsaka $x, y \in A \cup B$ velja:

$$x \leq y \iff (x, y \in A \,\wedge\, x \leq_A y) \vee (x, y \in B \,\wedge\, x \leq_B y) \vee (x \in A \,\wedge\, y \in B).$$

Izkaže se, da je $(A \cup B, \leq)$ dobro urejena množica. Zato definiramo

$$\alpha + \beta = [(A \cup B, \leq)].$$

Pokažemo lahko, da je $\alpha + \beta$ dobro definirano ordinalno število.

Naj bosta $\alpha = [(A, \leq_A)]$ in $\beta = [(B, \leq_B)]$ ordinalni števili. Na množici $A \times B$ vpeljemo relacijo $\leq$ tako (*antileksikografska ureditev*), da za vsaka $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ velja:

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff (b_1 <_B b_2) \vee (b_1 = b_2 \,\wedge\, a_1 \leq_A a_2).$$

Izkaže se, da je $(A \times B, \leq)$ dobro urejena množica. Zato definiramo

$$\alpha\beta = [(A \times B, \leq)].$$

Pokažemo lahko, da je $\alpha\beta$ dobro definirano ordinalno število.

Za ordinalno število α uporabljamo oznako $\alpha^2 = \alpha\alpha$, induktivno pa definiramo tudi višje potence števila α.

Za seštevanje in množenje poljubnih ordinalnih števil α, β, γ veljajo naslednje lastnosti:

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,
- $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$,
- $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (leva distributivnost).

Opomniti je potrebno, da v splošnem ne velja komutativnost seštevanja oziroma množenja, prav tako v splošnem ne velja desna distributivnost. Zlahka na primer opazimo, da je $2\omega = \omega$ (podobno je tudi $3\omega = \omega$, $4\omega = \omega$, itn.). Po drugi strani je $\omega 2 = \omega(1 + 1) = \omega + \omega$, kar ni enako ω.

Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $x \in A$. Potem množico $A_x = \{a \in A \mid a < x\}$ imenujemo *začetni interval* množice A glede na element x.

Naj bosta $\alpha = [(A, \leq_A)]$ in $\beta = [(B, \leq_B)]$ poljubni ordinalni števili. Potem definiramo: $\alpha < \beta$ natanko tedaj, ko obstaja tak $y \in B$, da je $(A, \leq_A) \simeq (B_y, \leq_B)$. Definiramo tudi: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

Ordinalna števila so tako urejena na naslednji način: $0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega 4, \ldots, \omega\omega = \omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \ldots, \omega^2+\omega 2, \ldots, \omega^2+\omega 3, \ldots, \omega^2+\omega^2 = \omega^2 2, \ldots, \omega^2 3, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots$

Izkaže se, da za poljubni ordinalni števili α, β velja natanko ena izmed naslednjih možnosti: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Preden prikažemo rešitev prvih dveh nalog, se dogovorimo, da bomo za zapis števila ω uporabljali tudi oznako

$$\omega = 1 + 1 + 1 + \cdots .$$

Opomniti je potrebno, da zapis na desni strani zgornje enakosti ne predstavlja standardne številske vrste, ampak ordinalno število dobro urejene množice, ki je unija neskončno disjunktnih dobro urejenih množic. Natančneje, naj bo $\{A_i \mid i \in I\}$ družina paroma disjunktnih množic, tako da je $(I, \leq_I)$ dobro urejena množica, prav tako pa je za vsak $i \in I$ tudi $(A_i, \leq_{A_i})$ dobro urejena množica. Če na uniji

$$U = \bigcup_{i \in I} A_i$$

vpeljemo relacijo $\leq$ na podoben način, kot smo to storili v primeru unije dveh množic, se izkaže, da je tudi $(U, \leq)$ dobro urejena množica (za več informacij glej [4]). Za vsak $i \in I$ naj bo λ_i ordinalno število dobro urejene množice $(A_i, \leq_{A_i})$ in naj bo še λ ordinalno število dobro urejene množice $(U, \leq)$. Potem je smiselno vpeljati oznako

$$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i.$$

Posledično lahko pišemo tudi na primer

$$\omega^2 = \omega\omega = \omega + \omega + \omega + \cdots .$$

Izpitne in kolokvijske naloge:

1. Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili:

$$\alpha = \omega(4\omega + 1)(\omega 2 + 2), \quad \beta = (3\omega 3 + 1)(2\omega 2 + 2)(\omega + 2).$$

Rešitev: *Oglejmo si posebej vsako izmed danih ordinalnih števil.*

Število α: *Najprej upoštevamo, da je $4\omega = \omega$, nato dvakrat uporabimo levo distributivnost in dobimo*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega(4\omega+1)(\omega 2+2) \\
&= \omega(\omega+1)(\omega 2+2) \\
&= (\omega\omega+\omega)(\omega 2+2) \\
&= (\omega^2+\omega)(\omega 2+1+1) \\
&= (\omega^2+\omega)\omega 2+(\omega^2+\omega)+(\omega^2+\omega).
\end{aligned}$$

Sedaj posebej obravnavajmo dve ordinalni števili: $\alpha_1 = (\omega^2+\omega)\omega$ in $\alpha_2 = (\omega^2+\omega)+(\omega^2+\omega)$.

Za drugo število lahko sklepamo

$$\alpha_2 = (\omega^2+\omega)+(\omega^2+\omega) = \omega^2+(\omega+\omega^2)+\omega = \omega^2+\omega^2+\omega = \omega^2 2+\omega,$$

pri čemer smo upoštevali $\omega+\omega^2 = \omega+(\omega+\omega+\omega+\cdots) = \omega^2$. Podobno sklepamo tudi za prvo število:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\omega^2+\omega)\omega \\
&= (\omega^2+\omega)+(\omega^2+\omega)+(\omega^2+\omega)+\cdots \\
&= \omega^2+(\omega+\omega^2)+(\omega+\omega^2)+\cdots \\
&= \omega^2+\omega^2+\omega^2+\cdots \\
&= \omega^2\omega = \omega^3.
\end{aligned}$$

Če združimo oba dela, dobimo

$$\alpha = \alpha_1 2+\alpha_2 = \omega^3 2+\omega^2 2+\omega.$$

Število β: *Uporabimo podoben postopek in dobimo*

$$\begin{aligned}
\beta &= (3\omega 3+1)(2\omega 2+2)(\omega+2) \\
&= (\omega 3+1)(\omega 2+1+1)(\omega+2) \\
&= ((\omega 3+1)\omega 2+(\omega 3+1)+(\omega 3+1))\,(\omega+2).
\end{aligned}$$

Sedaj označimo $\beta_1 = (\omega 3 + 1)\omega$ *in* $\beta_2 = (\omega 3 + 1) + (\omega 3 + 1)$ *ter opazimo*

$$\beta_2 = \omega 3 + (1 + \omega 3) + 1 = \omega 3 + \omega 3 + 1 = \omega 6 + 1,$$

pri čemer smo uporabili, da velja

$$1 + \omega = 1 + (1 + 1 + 1 + \cdots) = 1 + 1 + 1 + \cdots = \omega$$

in posledično

$$1 + \omega 3 = (1 + \omega) + \omega 2 = \omega + \omega 2 = \omega 3.$$

Podobno sklepamo tudi za prvo število:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\omega 3 + 1)\omega \\
&= (\omega 3 + 1) + (\omega 3 + 1) + (\omega 3 + 1) + \cdots \\
&= \omega 3 + (1 + \omega 3) + (1 + \omega 3) + \cdots \\
&= \omega 3 + \omega 3 + \omega 3 + \cdots \\
&= (\omega 3)\omega = \omega(3\omega) = \omega\omega \\
&= \omega^2.
\end{aligned}$$

Iz zapisanega dobimo

$$\beta = (\beta_1 2 + \beta_2)(\omega + 2) = (\omega^2 2 + \omega 6 + 1)(\omega + 2)$$

in posledično

$$\begin{aligned}
\beta &= (\omega^2 2 + \omega 6 + 1)(\omega + 1 + 1) \\
&= (\omega^2 2 + \omega 6 + 1)\omega + (\omega^2 2 + \omega 6 + 1) + (\omega^2 2 + \omega 6 + 1).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Spet označimo $\beta_3 = (\omega^2 2 + \omega 6 + 1)\omega$ *in* $\beta_4 = (\omega^2 2 + \omega 6 + 1) + (\omega^2 2 + \omega 6 + 1)$. *Najprej računamo tako:*

$$\begin{aligned}
\omega 6 + 1 + \omega^2 2 &= \omega 6 + 1 + (\omega + \omega + \omega + \cdots) + \omega^2 \\
&= \omega 6 + (\omega + \omega + \omega + \cdots) + \omega^2 \\
&= (\omega + \omega + \omega + \cdots) + \omega^2 \\
&= \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 2.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Enakost (5.2) *sedaj uporabimo v izračunu števila* β_4*:*

$$\begin{aligned}\beta_4 &= (\omega^2 2+\omega 6+1)+(\omega^2 2+\omega 6+1)\\ &= \omega^2 2+(\omega 6+1+\omega^2 2)+\omega 6+1\\ &= \omega^2 2+\omega^2 2+\omega 6+1\\ &= \omega^2 4+\omega 6+1.\end{aligned}$$

Na koncu računamo še število β_3 *in ponovno uporabimo enakost* (5.2)*:*

$$\begin{aligned}\beta_3 &= (\omega^2 2+\omega 6+1)\omega\\ &= (\omega^2 2+\omega 6+1)+(\omega^2 2+\omega 6+1)+(\omega^2 2+\omega 6+1)+\cdots\\ &= \omega^2 2+(\omega 6+1+\omega^2 2)+(\omega 6+1+\omega^2 2)+\cdots\\ &= \omega^2 2+\omega^2 2+\omega^2 2+\cdots\\ &= (\omega^2 2)\omega)=\omega^2(2\omega)=\omega^3.\end{aligned}$$

Z uporabo formule (5.1) *tako dobimo rezultat*

$$\beta=\beta_3+\beta_4=\omega^3+\omega^2 4+\omega 6+1.$$

Opazimo tudi, da velja $\alpha>\beta$*.*

Opomba: kot ustrezna se seveda upošteva tudi rešitev, kjer je namesto izračuna za določene enakosti podana skica.

2. Dani sta ordinalni števili $\alpha=2\omega^2+2$ in $\beta=2\omega 3+2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha\alpha\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

Rešitev. *Oglejmo si posebej vsako izmed danih ordinalnih števil.*

Število $\alpha\alpha\beta$*: Najprej upoštevamo, da je* $2\omega=\omega$*, nato uporabimo levo distributivnost in tako dobimo*

$$\begin{aligned}\alpha\alpha\beta &= (2\omega^2+2)(2\omega^2+2)(2\omega 3+2)\\ &= (\omega^2+2)(\omega^2+2)(\omega 3+2)\\ &= ((\omega^2+2)\omega^2+(\omega^2+2)2)(\omega 3+2)\\ &= ((\omega^2+2)\omega\omega+(\omega^2+2)+(\omega^2+2))(\omega 3+2).\end{aligned}$$

Označimo $\gamma_1 = (\omega^2+2)\omega$ *in* $\gamma_2 = (\omega^2+2)+(\omega^2+2)$ *ter opazimo*

$$\gamma_2 = \omega^2 + (2+\omega^2) + 2 = \omega^2 + \omega^2 + 2 = \omega^2 2 + 2,$$

pri čemer smo uporabili, da velja

$$2 + \omega = 1 + 1 + (1 + 1 + 1 + \cdots) = 1 + 1 + 1 + \cdots = \omega$$

in posledično

$$2 + \omega^2 = 2 + \omega + \omega + \omega + \cdots = \omega + \omega + \omega + \cdots = \omega^2.$$

Podobno sklepamo tudi za prvo število:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\omega^2+2)\omega \\
&= (\omega^2+2)+(\omega^2+2)+(\omega^2+2)+\cdots \\
&= \omega^2 + (2+\omega^2) + (2+\omega^2) + \cdots \\
&= \omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + \cdots \\
&= \omega^2\omega = \omega^3.
\end{aligned}$$

Iz zapisanega dobimo

$$\alpha\alpha\beta = (\gamma_1\omega + \gamma_2)(\omega 3 + 2) = (\omega^4 + \omega^2 2 + 2)(\omega 3 + 2)$$

in posledično

$$\begin{aligned}
\alpha\alpha\beta &= (\omega^4 + \omega^2 2 + 2)(\omega 3 + 1 + 1) \\
&= (\omega^4 + \omega^2 2 + 2)\omega 3 + (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) + (\omega^4 + \omega^2 2 + 2).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Spet označimo $\gamma_3 = (\omega^4 + \omega^2 2 + 2)\omega$ *in* $\gamma_4 = (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) + (\omega^4 + \omega^2 2 + 2)$. *Ker je* $2 + \omega = \omega$, *izpeljemo tudi*

$$\begin{aligned}
2 + \omega^4 &= 2 + \omega^3 + \omega^3 + \omega^3 + \cdots \\
&= 2 + (\omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + \cdots) + \omega^3 + \omega^3 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + ((\omega + \omega + \omega + \cdots) + \omega^2 + \omega^2 + \cdots) + \omega^3 + \omega^3 + \cdots \\
&= ((\omega + \omega + \omega + \cdots) + \omega^2 + \omega^2 + \cdots) + \omega^3 + \omega^3 + \cdots \\
&= \omega^4.
\end{aligned}$$

Z zelo podobnim sklepanjem tako dobimo

$$\omega^2 2 + 2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega^2 + \omega^4 = \omega^4. \tag{5.4}$$

Enakost (5.4) *sedaj uporabimo v izračunu števila* γ_4*:*

$$\begin{aligned}
\gamma_4 &= (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) + (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) \\
&= \omega^4 + (\omega^2 2 + 2 + \omega^4) + \omega^2 2 + 2 \\
&= \omega^4 + \omega^4 + \omega^2 2 + 2 \\
&= \omega^4 2 + \omega^2 2 + 2.
\end{aligned}$$

Na koncu računamo še število γ_3 *in ponovno uporabimo enakost* (5.4)*:*

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= (\omega^4 + \omega^2 2 + 2)\omega \\
&= (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) + (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) + (\omega^4 + \omega^2 2 + 2) + \cdots \\
&= \omega^4 + (\omega^2 2 + 2 + \omega^4) + (\omega^2 2 + 2 + \omega^4) + \cdots \\
&= \omega^4 + \omega^4 + \omega^4 + \cdots \\
&= \omega^4 \omega = \omega^5.
\end{aligned}$$

Z uporabo formule (5.3) *tako dobimo rezultat*

$$\alpha\alpha\beta = \gamma_3 3 + \gamma_4 = \omega^5 3 + \omega^4 2 + \omega^2 2 + 2.$$

<u>*Število* $\alpha\beta\alpha$*:*</u> *Spet upoštevamo, da je* $2\omega = \omega$ *ter uporabimo levo distributivnost, da dobimo*

$$\begin{aligned}
\alpha\beta\alpha &= (2\omega^2 + 2)(2\omega 3 + 2)(2\omega^2 + 2) \\
&= (\omega^2 + 2)(\omega 3 + 2)(\omega^2 + 2) \\
&= ((\omega^2 + 2)\omega 3 + (\omega^2 + 2)2)(\omega^2 + 2) \\
&= ((\omega^2 + 2)\omega 3 + (\omega^2 + 2) + (\omega^2 + 2))(\omega^2 + 2).
\end{aligned}$$

Ker že od prej vemo (glej γ_2 in γ_1 pri številu $\alpha\alpha\beta$), da je $(\omega^2+2)+(\omega^2+2) = \omega^2 2+2$ *in* $(\omega^2+2)\omega = \omega^3$*, dobimo*

$$\begin{aligned} \alpha\beta\alpha &= (\omega^3 3+\omega^2 2+2)(\omega^2+2) \\ &= (\omega^3 3+\omega^2 2+2)\omega^2 + (\omega^3 3+\omega^2 2+2) + (\omega^3 3+\omega^2 2+2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Označimo $\delta_1 = (\omega^3 3+\omega^2 2+2)\omega$ *in* $\delta_2 = (\omega^3 3+\omega^2 2+2)+(\omega^3 3+\omega^2 2+2)$. *Ker je* $2+\omega=\omega$, *na podoben način kot pri številu $\alpha\alpha\beta$ izpeljemo* $2+\omega^3 2 = \omega^3 2$. *Z analognim sklepanjem tako dobimo*

$$\omega^2 2+2+\omega^3 3 = \omega^2 2+\omega^3 3 = \omega^3 3. \tag{5.6}$$

Enakost (5.6) *sedaj uporabimo v izračunu števila* δ_2*:*

$$\begin{aligned} \delta_2 &= (\omega^3 3+\omega^2 2+2)+(\omega^3 3+\omega^2 2+2) \\ &= \omega^3 3+(\omega^2 2+2+\omega^3 3)+\omega^2 2+2 \\ &= \omega^3 3+\omega^3 3+\omega^2 2+2 \\ &= \omega^3 6+\omega^2 2+2. \end{aligned}$$

Na koncu računamo še število δ_1 *in ponovno uporabimo enakost* (5.6)*:*

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\omega^3 3+\omega^2 2+2)\omega \\ &= (\omega^3 3+\omega^2 2+2)+(\omega^3 3+\omega^2 2+2)+(\omega^3 3+\omega^2 2+2)+\cdots \\ &= \omega^3 3+(\omega^2 2+2+\omega^3 3)+(\omega^2 2+2+\omega^3 3)+\cdots \\ &= \omega^3 3+\omega^3 3+\omega^3 3+\cdots \\ &= (\omega^3 3)\omega = \omega^3(3\omega) \\ &= \omega^3\omega = \omega^4. \end{aligned}$$

Z uporabo formule (5.5) *tako dobimo rezultat*

$$\alpha\beta\alpha = \delta_1\omega+\delta_2 = \omega^5+\omega^3 6+\omega^2 2+2.$$

Opazimo tudi, da velja $\alpha\alpha\beta > \alpha\beta\alpha$.

Opomba: kot ustrezna se seveda upošteva tudi rešitev, kjer je namesto izračuna za določene enakosti podana skica.

3. Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednja ordinalna števila:

$$(3\omega + 2)\omega(\omega 2 + 1), (4\omega + 1)(\omega^2 2 + 2), \omega(5\omega + 3)(\omega + 1).$$

4. Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili $\alpha = \omega^2(\omega^2 + 3\omega 2 + 1)(2\omega^2 + 2)$ in $\beta = (\omega^2 + \omega 3)(\omega^2 + 2)(\omega^2 + \omega)$.

5. Dani sta ordinalni števili $\alpha = 3\omega + 1$ in $\beta = \omega 2 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

6. Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili:

$$(4\omega + 1)\omega(\omega 2 + 2), (3\omega 3 + 1)(2\omega 2 + 2)(\omega + 1).$$

7. Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili $\omega^2(\omega^2+\omega)(\omega^2+1)$ in $\omega^2(\omega^2 + 1)(\omega^2 + \omega)$.

8. Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2\omega 3 + 3$ in $\beta = 3\omega 2 + 1$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

9. Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (\omega^2 2 + 3\omega 3 + 2)^3, \quad \beta = (2\omega^2 + 2)(5\omega^2 2 + 3)(\omega^2 3 + \omega).$$

10. Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (3\omega 2 + 2)(\omega 3 + 1)(4\omega + 3), \quad \beta = (\omega 3 + 2)\omega(2\omega 3 + 3).$$

11. Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili

$$\alpha = (\omega^2 4 + \omega 3 + 1)(5\omega + 1)(\omega 2 + 2) \text{ in } \beta = (3\omega 2 + 1)^2(\omega^2 2 + \omega 3 + 2).$$

12. Dani sta ordinalni števili $\alpha = \omega 2 + 1$ in $\beta = 2\omega + 3$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha^2\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

13. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha = (\omega^2 + \omega 3)(\omega^2 + 1)(\omega^2 + \omega 2 + 2)$ in $\beta = (\omega^2 + 1)(\omega^2 3 + 1)(\omega^2 + \omega 3)$.

14. Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili

$$\alpha = (4\omega^2 + \omega 2 + 1)(\omega^2 2 + 2)(\omega 3 + 2) \text{ in } \beta = (3\omega + 1)(2\omega^2 + 2)(\omega^2 3 + \omega 2 + 3).$$

15. Naj bo $\alpha = 2\omega^2 + 1$ in $\beta = \omega^2 2 + 3\omega 3 + 2$. Čim bolj poenostavi in primerjaj po velikosti ordinalni števili $\alpha^2\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

16. Čim bolj poenostavi in primerjaj po velikosti ordinalni števili

$$\alpha = (2w + 1)(w2 + 3)(3w^2 + 2w3 + 2) \text{ in } \beta = (3w + 2)(w^2 3 + 3w + 1)(w2 + 2).$$

Poglavje 6

Prvi kolokviji

6.1 Prvi kolokvij, 5. 5. 2015

1. **[20]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1 + \frac{1}{n} \wedge -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

3. **[25]** Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \longrightarrow Y$ injektivna funkcija.

   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico A množice X velja $f^{-1}(f(A)) = A$.

   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F surjektivna funkcija.

   Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

4. **[30]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

6.2 Prvi kolokvij, 6. 5. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) = (B \setminus (C \cup A)) \cup ((C \cup A) \setminus B)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Dana je funkcija $f : A \longrightarrow B$. Naj bo K neprazna množica in naj bo za vsak $k \in K$ množica B_k podmnožica od B. Dokaži, da velja:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) = \bigcup_{k \in K} f^{-1}(B_k)$$

Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $B = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh matrik (vseh možnih dimenzij) z racionalnimi koeficienti. Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

6.3 Prvi kolokvij (ponavljalni), 20. 5. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; n^2x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

   (a) Skiciraj množice A_1, A_2 in A_3.

   (b) Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Za en odgovor zapiši tudi dokaz, da je resničen.

2. **[25]** Dana je funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Naj bosta A in B podmnožici od Y. Dokaži, da velja:

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

   Opomba: za $g : X \longrightarrow Y$ in $Z \subseteq Y$, je $g^{-1}(Z) = \{x \in X \mid g(x) \in Z\}$.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \times [0, 2]$ in $B = [0, 4] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Eksplicitno zapiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ (x^{23} - 2x^{10} + 5x)^n + 2x^2 - 3 = 0\right\}.$$

   Ali je množica $\mathcal{M}$ števna? Odgovor utemelji z dokazom!

6.4 Prvi kolokvij, 14. 5. 2021

1. **[25]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. Ugotovi in utemelji, ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup C = \big((A \cup C) \setminus B\big) \cup \big(B \setminus (A \setminus C)\big).$$

   Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa. Če ne velja, ugotovi, ali velja katera izmed inkluzij (inkluzije, ki veljajo, prav tako dokaži s pomočjo izjavnega računa).

2. **[25]** Podani sta funkcija $f : X \to Y$ in neprazna množica K. Za vsak $k \in K$ naj bo A_k podmnožica od X. Dokaži, da velja

$$f\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) \subseteq \bigcap_{k \in K} f(A_k).$$

   Dokaži tudi, da enakost med množicama v zgornji formuli ne velja v splošnem, velja pa v primeru, ko je funkcija f injektivna.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ in $B = L \times (-\infty, 2)$, kjer je L množica vseh lihih naravnih števil. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo B množica vseh možnih besed (torej množica vseh možnih končnih nizov), ki jih lahko sestavimo iz črk slovenske abecede. Ali je množica B števna? Odgovor utemelji z dokazom!

6.5 Prvi kolokvij, 10. 5. 2022

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 3 - \frac{1}{n} \;\wedge\; \frac{1}{n} \leq y < 2n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

2. **[25]** Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \to Y$ surjektivna funkcija.

   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico B množice Y velja $f(f^{-1}(B)) = B$.

   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za vsak $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F injektivna funkcija.

Opomba: za $g : X \to Y$ in $C \subseteq Y$ je $g^{-1}(C) = \{x \in X \mid g(x) \in C\}$.

3. **[25]** Naj bo

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\wedge\; y = \frac{1}{x} \right\} \text{ in } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}.$$

Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Podana je množica

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{obstaja } n \in \mathbb{N}, \text{ tako da velja } \cos(nx) = 0\}.$$

Ali je množica A števna? Odgovor utemelji z dokazom!

Poglavje 7

Drugi kolokviji

7.1 Drugi kolokvij, 12. 6. 2015

1. **[25]** Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Vsako izmed naslednjih dveh trditev dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi:

   (a) Če je množica A števna, je tudi $f(A)$ števna.

   (b) Če je množica B števna, je tudi $f^{-1}(B)$ števna.

2. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 1)$.

   (b) Določi moč množice $\mathbb{R}^2/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

3. **[25]** Naj bo A množica vseh podmnožic od $\mathbb{R}$, ki vsebujejo množico $\mathbb{N}$ ter B množica vseh zaporedij kompleksnih števil. Določi moči množic A in B (pri tem odgovora utemelji) ter ju primerjaj po velikosti.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednja ordinalna števila:

$$(3\omega + 2)\omega(\omega 2 + 1), (4\omega + 1)(\omega^2 2 + 2), \omega(5\omega + 3)(\omega + 1).$$

7.2 Drugi kolokvij, 6. 6. 2016

1. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \iff \cos x - \cos y \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Ali je ekvivalenčni razred števila 0 števna množica?

   (c) Dokaži, da množica $\mathbb{R}/_\sim$ ni števna.

2. **[25]** Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   A - množica vseh polinomov p s predpisom $p(x) = ax^2 + bx + c$, kjer je $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

3. **[25]** Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $f : (A, \leq) \longrightarrow (A, \leq)$ strogo naraščajoča funkcija (torej za vsaka $x, y \in A$ velja: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$). Dokaži, da za vsak $a \in A$ velja $a \leq f(a)$.
   Namig: obravnavaj množico $D = \{x \in A \mid x > f(x)\}$.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili $\alpha = \omega^2(\omega^2 + 3\omega 2 + 1)(2\omega^2 + 2)$ in $\beta = (\omega^2 + \omega 3)(\omega^2 + 2)(\omega^2 + \omega)$.

7.3 Drugi kolokvij, 7. 6. 2021

1. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 4\}$. Skiciraj množici A in B v ravnini ter s pomočjo kardinalne aritmetike pokaži, da je $|A| = |B|$. Vse korake utemelji z dokazi!

2. **[25]** Določi moči množic A, B, C in svoje trditve utemelji z dokazi:

   A: množica vseh matrik velikosti 2×2, katerih diagonalna elementa sta racionalni števili, preostala dva elementa pa celi števili.

   B: množica vseh podmnožic množice A.

   C: množica vseh zaporedij elementov iz množice B.

3. **[25]** Naj bo A množica vseh naravnih števil, ki so deljiva s 3, in $B = \mathbb{N} \setminus A$. Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ vpeljemo relacijo $\leq'$ na naslednji način:

$$n \leq' m \Leftrightarrow (n \in A, m \in B) \vee (n, m \in A \text{ in } n \leq m) \vee (n, m \in B \text{ in } n \leq m),$$

   kjer je $\leq$ naravna ureditev na $\mathbb{N}$. Dokaži, da je $(\mathbb{N}, \leq')$ dobro urejena množica in poišči njene limitne elemente. Ali sta $(\mathbb{N}, \leq)$ in $(\mathbb{N}, \leq')$ izomorfni? Vse odgovore utemelji!

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili

$$\alpha = (\omega^2 4 + \omega 3 + 1)(5\omega + 1)(\omega 2 + 2) \text{ in } \beta = (3\omega 2 + 1)^2(\omega^2 2 + \omega 3 + 2).$$

7.4 Drugi kolokvij, 7. 6. 2022

1. **[30]** Določi moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti:

   A: množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere obstajata $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ in $k \in \mathbb{Z}$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = kx + n$.

   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \ \wedge \ y = \frac{1}{x^2}\}$.

   C: množica vseh funkcij, ki slikajo iz B v A.

   Vse trditve natančno utemelji z dokazi!

2. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}^3$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff x_1 - y_1 + z_1 = x_2 - y_2 + z_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Zapiši tudi ekvivalenčna razreda $[(0, 0, 0)]$ in $[(0, 0, 1)]$. Kaj geometrijsko predstavljata ta dva ekvivalenčna razreda?

   (b) Določi moč kvocientne množice $\mathbb{R}^3/_\sim$ in svoj odgovor utemelji z dokazom.

3. **[20]** Naj bo $(A, \leq)$ dobro urejena množica in $B \subseteq A$ takšna podmnožica od A, da za vsaka $a, b \in A$ velja: če je $a \leq b$ in $b \in B$, potem je $a \in B$. Dokaži, da je $B = A$ ali pa je B začetni interval v množici A.

   Opomba: B je začetni interval v množici A natanko takrat, ko za neki $x \in A$ velja $B = A_x = \{y \in A \mid y < x\}$.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili

$$\alpha = (4\omega^2 + \omega 2 + 1)(\omega^2 2 + 2)(\omega 3 + 2) \text{ in } \beta = (3\omega + 1)(2\omega^2 + 2)(\omega^2 3 + \omega 2 + 3).$$

Poglavje 8

Kolokviji za izobraževalno matematiko

8.1 Kolokvij za izobraževalno matematiko, 5. 5. 2015

1. **[20]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži enakost
$$(C \cap (A \cup B)) \setminus A = (C \cap B) \setminus A.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq x < 1+\frac{1}{n} \wedge -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\}$. Izračunaj
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
in svoj odgovor utemelji tako, da dokažeš obe inkluziji.

3. **[30]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \longrightarrow B$. Utemelji, zakaj je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj $K_r(x, y)$ predstavlja krožnico v $\mathbb{R}^2$ s središčem v točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in polmerom r. Dokaži, da je množica $\mathcal{K} = \{K_r(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}^+\}$ števna množica.

8.2 Kolokvij za izobraževalno matematiko, 14. 5. 2021

1. **[25]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. Ugotovi in utemelji, ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup C = \big((A \cup C) \setminus B\big) \cup \big(B \setminus (A \setminus C)\big).$$

   Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa. Če ne velja, ugotovi, ali velja katera izmed inkluzij (inkluzije, ki veljajo, prav tako dokaži s pomočjo izjavnega računa).

2. **[25]** Naj bodo A, B in C podmnožice množice X in naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Dokaži, da velja

$$f(A \cap B \cap C) \subseteq f(A) \cap f(B) \cap f(C).$$

   Dokaži tudi, da enakost med množicama v zgornji formuli ne velja v splošnem, velja pa v primeru, ko je funkcija f injektivna.

3. **[25]** Naj bo $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ in $B = L \times (-\infty, 2)$, kjer je L množica vseh lihih naravnih števil. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Določi moč množice A, ki vsebuje vse linearne funkcije f s predpisom $f(x) = kx + n$, katerih začetna vrednost n je celo število, smerni koeficient k pa racionalno število. Ali je množica A števna? Dokaži svoje trditve!

8.3 Kolokvij za izobraževalno matematiko, 10. 5. 2022

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

2. **[25]** Naj bosta X in Y neprazni množici ter $f : X \to Y$ surjektivna funkcija.

   (a) Dokaži, da za vsako podmnožico B množice Y velja $f(f^{-1}(B)) = B$.

   (b) Naj bo funkcija $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definirana s predpisom $F(B) = f^{-1}(B)$ za vsak $B \in \mathcal{P}(Y)$. Dokaži, da je F injektivna funkcija.

Opomba: za $g : X \to Y$ in $C \subseteq Y$ je $g^{-1}(C) = \{x \in X \mid g(x) \in C\}$.

3. **[25]** Naj bo

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \wedge \ y = \frac{1}{x} \right\} \text{ in } B = \mathbb{R}.$$

Skiciraj množico A in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Naj bo A množica vseh matrik velikosti 2×2, katerih diagonalna elementa sta celi števili, preostala dva elementa pa realni števili. Določi moč množice A. Ali je množica A števna? Svoje trditve dokaži!

Poglavje 9

Pisni izpiti

9.1 Izpit, 16. 6. 2015

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) = (A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C)$$

   za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ in $B = (-1, 1)\times(-1, 1)$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter dokaži, da je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Določi moč množice vseh realnih 2×2 matrik, katerih determinanta je enaka 1. Odgovor utemelji z dokazom!

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 3\omega + 1$ in $\beta = \omega 2 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

9.2 Izpit, 2. 7. 2015

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \times (C \cup D) = ((A \setminus B) \times C) \cup (A \times D)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa jo s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $A_n = [0, n]$. Izračunaj

(a) $\displaystyle\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n > m} A_n \right)$

(b) $\displaystyle\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n > m} A_n \right)$

Pri tem naj bodo sklepi utemeljeni.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^3$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter poimenuj in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 0, 1)$. Določi moč množice $\mathbb{R}^3/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili:

$$(4\omega + 1)\omega(\omega 2 + 2), (3\omega 3 + 1)(2\omega 2 + 2)(\omega + 1).$$

9.3 Izpit, 24. 8. 2015

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \mid \ \frac{1}{n} < x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}.$$

   Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 1]$ in $B = \mathbb{R} \times [0, 2]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Določi moči množic A, B in C ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{R}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh podmnožic množice A.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi ter primerjaj po velikosti ordinalni števili $\omega^2(\omega^2 + \omega)(\omega^2 + 1)$ in $\omega^2(\omega^2 + 1)(\omega^2 + \omega)$.

9.4 Izpit, 5. 2. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo $A = [0, 2] \times (0, 1)$ in $B = (0, 2) \times [0, 1]$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$x \sim y \iff \sin(x - y) = 0.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred števila 0 in določi njegovo moč.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2\omega 3 + 3$ in $\beta = 3\omega 2 + 1$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalna števila $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$ in $\beta\alpha\alpha$.

9.5 Izpit, 13. 6. 2016

1. **[25]** Naj bo I poljubna neprazna množica. Za vsak $i \in I$ naj bosta A_i in B_i množici. Dokaži, da velja

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} \big(A_i \times B_i\big).$$

2. **[25]** Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $[0,1) \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$. Utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici vseh realnih 2×2 matrik $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ je definirana s formulo

$$A \sim B \Longleftrightarrow \det A = \det B.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Ali je ekvivalenčni razred enotske matrike I števna množica?

   (c) Določi moč množice $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/_\sim$.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = 2\omega^2 + 2$ in $\beta = 2\omega 3 + 2$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha\alpha\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

9.6 Izpit, 27. 6. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 0 \leq y \leq \frac{x}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

3. **[25]** Naj bodo a, b in c kardinalna števila in naj bo $c \neq 0$. Dokaži, da velja:

$$a \leq b \Longrightarrow c^a \leq c^b.$$

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednji ordinalni števili:

$$\alpha = \omega(4\omega + 1)(\omega 2 + 2), \quad \beta = (3\omega 3 + 1)(2\omega 2 + 2)(\omega + 2).$$

9.7 Izpit, 25. 8. 2016

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2^n} \leq x < n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija. Množici A in B tudi skiciraj.

3. **[25]** Določi moči množic A, B, C, D ter jih primerjaj po velikosti. Vse sklepe utemelji!

   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{N}\}$.

   B - množica vseh zaporedij elementov iz A.

   C - množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to A$.

   D - množica vseh podmnožic množice A.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (\omega^2 2 + 3\omega 3 + 2)^3, \quad \beta = (2\omega^2 + 2)(5\omega^2 2 + 3)(\omega^2 3 + \omega).$$

9.8 Izpit, 10. 2. 2017

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid e^{-n} \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

2. **[25]** Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}_3[X]$ vseh polinomov oblike $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ s koeficienti iz $\mathbb{R}$, je definirana s formulo

$$p \sim q \iff p' = q',$$

kjer p' označuje odvod polinoma p, q' pa odvod polinoma q. Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija ter zapiši ekvivalenčni razred polinoma $p(x) = 1$ in določi njegovo moč.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj ordinalni števili

$$\alpha = (3\omega 2 + 2)(\omega 3 + 1)(4\omega + 3), \quad \beta = (\omega 3 + 2)\omega(2\omega 3 + 3).$$

9.9 Izpit, 28. 6. 2021

1. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3^{-n} < x < 3 + \frac{2}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

2. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$ in $B = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

3. (a) **[10]** Dana je množica $A = \{7n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Izračunaj moč množice $B = A \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$ in odgovor utemelji z dokazom.

   (b) **[15]** Dokaži, da za poljubna kardinalna števila a, b in c velja: $a < b \ \wedge \ b < c \Rightarrow a < c$.

4. **[25]** Dani sta ordinalni števili $\alpha = \omega 2 + 1$ in $\beta = 2\omega + 3$. Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili $\alpha^2 \beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

9.10 Izpit, 30. 8. 2021

1. **[25]** Naj bodo A, B, C, D poljubne množice. Ugotovi, ali velja spodnja enakost:

$$(A \setminus B) \times (C \cap D) = ((A \times C) \cap (A \times D)) \setminus ((B \times C) \cap (B \times D)).$$

   Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa, sicer pa jo s protiprimerom ovrži.

2. **[25]** Naj bo $A = (0, \infty) \times \{1, 2\}$ in $B = \mathbb{R}$. V ravnini skiciraj množico A in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

3. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - \ln x_1 = y_2 - \ln x_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in v ravnini skiciraj ekvivalenčna razreda $[(1, 0)]$ in $[(e^2, 3)]$.

   (b) Določi moč kvocientne množice $A/_\sim$ in svoj odgovor utemelji z dokazom.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in uredi po velikosti ordinalni števili
   $\alpha = (\omega^2 + \omega 3)(\omega^2 + 1)(\omega^2 + \omega 2 + 2)$ in $\beta = (\omega^2 + 1)(\omega^2 3 + 1)(\omega^2 + \omega 3)$.

9.11 Izpit, 23. 6. 2022

1. **[25]** Naj bodo A, B, C poljubne množice. Ugotovi, ali velja spodnja enakost:

$$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C) = A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C)).$$

   Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa, sicer pa jo s protiprimerom ovrži.

2. **[25]** Naj bo $A = (0, \infty) \times \mathbb{N}$ in $B = \mathbb{Z} \times (0, 4)$. V ravnini skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

3. **[25]** Določi moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti:

   A: množica vseh funkcij $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere obstajajo $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Q}^+$, $c \in [0, 1]$ in $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

   B: množica vseh zaporedij elementov iz množice A.

   C: množica vseh funkcij, ki slikajo iz B v $\mathbb{Q}$.

   Svoje trditve utemelji z dokazi!

4. **[25]** Naj bo $\alpha = 2\omega^2 + 1$ in $\beta = \omega^2 2 + 3\omega 3 + 2$. Čim bolj poenostavi in primerjaj po velikosti ordinalni števili $\alpha^2\beta$ in $\alpha\beta\alpha$.

9.12 Izpit, 26. 8. 2022

1. **[25]** Naj bodo A, B, C poljubne množice. Ugotovi, ali velja spodnja enakost:

$$((A \setminus C) \cap (B \cup C)) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C.$$

   Če enakost velja, jo dokaži s pomočjo izjavnega računa, sicer pa jo s protiprimerom ovrži.

2. **[25]** Naj bo $A = [0,1] \times \mathbb{N}$ in $B = (1, \infty)$. Skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

3. **[25]** Podani sta naslednji podmnožici množice $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x - 1\}$ in $B = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \mid y < x\}$. Skiciraj množici A in B ter s pomočjo kardinalne aritmetike pokaži, da je $|A| = |B|$. Vse korake utemelji z dokazi!

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in primerjaj po velikosti ordinalni števili

   $\alpha = (2w + 1)(w2 + 3)(3w^2 + 2w3 + 2)$ in $\beta = (3w + 2)(w^2 3 + 3w + 1)(w2 + 2)$.

Poglavje 10

Pisni izpiti za izobraževalno matematiko

10.1 Izpit za izobraževalno matematiko, 27. 6. 2016

1. [**25**] Ali velja enakost

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \cup C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. [**25**] Izračunaj

   (a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$

   (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$

   ter odgovora utemelji z dokazom.

3. [**25**] Eksplicitno opiši eno bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0, 2)$ ter utemelji, zakaj je opisana funkcija res bijekcija.

4. [**25**] Ali je množica vseh kvadratnih polinomov z racionalnimi koeficienti števna množica? Odgovor utemelji!

10.2 Izpit za izobraževalno matematiko, 25. 8. 2016

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli o veljavnosti obeh inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2^n} \leq x < n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji z dokazi!

3. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^x\}$. Eksplicitno opiši eno bijekcijo med A in B ter utemelji, zakaj

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.

10.3 Izpit za izobraževalno matematiko, 10. 2. 2017

1. **[25]** Ali velja enakost

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B) = A \cup (B \setminus C)$$

za poljubne množice A, B in C? Če enakost ne velja, razmisli ločeno o veljavnosti posameznih inkluzij. Vsako inkluzijo s pomočjo izjavnega računa dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi.

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\mid\; e^{-n} \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Svoje trditve utemelji!

3. **[25]** Naj bo A neprazna množica in $h : A \to A$ funkcija. Dokaži, da je h injektivna natanko tedaj, ko za vsaki dve funkciji $f, g : A \to A$ velja: $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

4. **[25]** Naj bo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ množica vseh matrik reda 2×2 z elementi, ki so cela števila. Ali je množica $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ števna? Odgovor utemelji.

10.4 Izpit za izobraževalno matematiko, 28. 6. 2021

1. **[25]** Naj bodo A, B in C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa pokaži, da velja enakost
$$(A \cap (B \cup C)) \setminus B = (A \cap C) \setminus B.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo
$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3^{-n} < x < 3 + \frac{2}{n} \right\}.$$
Izračunaj $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazi!

3. **[25]** Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$ in $B = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Skiciraj obe množici in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Dani sta množici $A = \{7n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $B = A \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$. Naj bo še C množica vseh podmnožic množice B. Izračunaj moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti. Ali je katera od teh množic števna? Vse sklepe utemelji z dokazi!

10.5 Izpit za izobraževalno matematiko, 30. 8. 2021

1. **[25]** Naj bodo A, B, C, D poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži, da velja spodnja enakost:

$$(A \setminus B) \times (C \cap D) = ((A \times C) \cap (A \times D)) \setminus ((B \times C) \cap (B \times D)).$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{2^n} < x < 3n \right\}.$$

Izračunaj $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve utemelji z dokazom!

3. **[25]** Naj bo $A = (0, \infty) \times \{1, 2\}$ in $B = \mathbb{R}$. V ravnini skiciraj množico A in eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - \ln x_1 = y_2 - \ln x_2.$$

   (a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in v ravnini skiciraj ekvivalenčna razreda $[(1, 0)]$ in $[(e^2, 3)]$.

   (b) Določi moč ekvivalenčnega razreda $[(e^2, 3)]$ in svoj odgovor utemelji z dokazom.

10.6 Izpit za izobraževalno matematiko, 23. 6. 2022

1. **[25]** Naj bodo A, B, C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži, da velja spodnja enakost:

$$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C) = A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C)).$$

2. **[25]** Naj bo $A = (-1, 1) \times S$ in $B = \mathbb{N} \times (2, 6)$, kjer je S množica vseh sodih naravnih števil. V ravnini skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

3. **[25]** Določi moči množic A in B ter ju primerjaj po velikosti:

   A: množica vseh funkcij $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere obstajajo $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{N}$ in $d \in \mathbb{Q}^+$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

   B: množica vseh podmnožic množice A.

   Ali je katera od množic A oziroma B števna? Svoje trditve utemelji z dokazi!

4. **[25]** Relacija $\sim$ na množici $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - 3x_1 = y_2 - 3x_2.$$

   Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in v ravnini skiciraj ekvivalenčna razreda $[(0, 0)]$ in $[(1, 4)]$. Določi še moč ekvivalenčnega razreda $[(0, 0)]$ in svoj odgovor dokaži.

10.7 Izpit za izobraževalno matematiko, 26. 8. 2022

1. **[25]** Naj bodo A, B, C poljubne množice. S pomočjo izjavnega računa dokaži, da velja spodnja enakost:

$$((A \setminus C) \cap (B \cup C)) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C.$$

2. **[25]** Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 + 2^{-n}\right\}.$$

Izračunaj $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ter svoje trditve natančno utemelji z dokazi!

3. **[25]** Naj bo $A = (0,1] \times \mathbb{N}$ in $B = (1, \infty)$. Skiciraj množici A in B ter eksplicitno opiši eno bijektivno funkcijo $f : A \to B$. Dokaži, da je definirana funkcija res bijekcija!

4. **[25]** Podana je množica $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Naj bo še B množica vseh podmnožic množice A ter C množica vseh funkcij, ki slikajo iz $\mathbb{R}$ v A. Izračunaj moči množic A, B, C in jih primerjaj po velikosti. Ali je katera od teh množic števna? Vse sklepe utemelji z dokazi!

Literatura

[1] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, Zbirka zadataka iz teorije skupova, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2009.

[2] M. Jakovac, N. Tratnik, Zbrano gradivo: vaje iz elementarnih funkcij, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019. Dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2019/01/ef_gradivo_vaje-1.pdf` dne 12. 8. 2022.

[3] U. Milutinović, Teorija množic: Naloge, Vzorci pisnih izpitov in kolokvijev (1997 - 2005). Dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/index.php/zaposleni/clani-oddelka/uros-milutinovic/` dne 12. 8. 2022.

[4] S. Lipschutz, Schaum's outline of theory and problems of set theory and related topics, McGraw-Hill, New York, 1998.

[5] N. Tratnik, Zbrano gradivo: izpitne in kolokvijske naloge iz teorije množic v letih 2015-2017, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019. Dosegljivo na naslovu `https://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/2019/01/tm_gradivo-1.pdf` dne 27. 7. 2022.

[6] M. Vuković, Teorija skupova, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2013.