

# 1 Rodovne funkcije, Catalanova števila, partija naravnega števila

## 1.1 Rodovna funkcija

1. Pišči prve štiri koeficiente potenčne vrste  $\frac{1+4x}{1+5x+x^2}$ .
2. Zapiši potenčno vrsto  $\frac{5-3x}{2-3x+x^2}$ .
3. Zapiši koeficient pred  $x^n$  v potenčni vrsti  $\frac{1+2x+2x^2}{1-3x+3x^2-x^3}$ .
4. Imejmo rekurzivno podano zaporedje  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ . Zapiši splošni člen  $a_n$ .
5. Poišči koeficient pred  $x^{17}$  v razvoju  $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ .
6. Imamo 6 kovancev z vrednostjo 1, 5 kovancev z vrednostjo 2 in 4 kovanice z vrednostjo 5. Na koliko načinov lahko plačamo 21 enot?
7. Dokaži:  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ .
8. Na koliko načinov lahko razdelimo 10 enakih žog dvema fantoma in dvema deklicama, če mora vsak fant dobiti vsaj eno žogo vsako dekle pa vsaj 2 žogi?
9. Naj bo  $(a_n)$  zaporedje z  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ . Dokaži, da je rodovna funkcija  $G(x)$  zaporedja  $(a_n)$  enaka  $G(x) = \frac{x}{1-Ax-Bx^2}$ .
10. Poišči rodovno funkcijo za število načinov izbire urejenega para različnih elementov iz množice z  $n$  elementi.
11. Poišči rodovno funkcijo zaporedja  $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$ .
12. Poišči rodovno funkcijo zaporedja  $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$ .
13. Na izbiro imamo 3 objekte  $a, b$  in  $c$ . Na koliko načinov lahko izberemo  $k$  objektov?
14. Na izbiro imamo 2 objekta  $a$ , 1 objekt  $b$  in en objekt  $c$ . Na koliko načinov lahko izberemo  $k$  objektov?
15. Na izbiro imamo  $n_1$  objektov tipa 1,  $n_2$  objektov tipa 2, ...,  $n_p$  objektov tipa  $p$ . Na koliko načinov lahko izberemo  $k$  objektov?

16. Petim vevericam želimo razdeliti 20 orehov. Na koliko načinov lahko to naredimo, če naj ima vsaka
  - (a) 2,4 ali 6 orehov?
  - (b) če naj nobena ne dobi več kot 5 in manj kot 3 orehe?
17. V škatli je 30 rdečih, 40 modrih in 50 belih kroglic. Na koliko načinov lahko iz škatle izberemo 70 kroglic?
18. Uporabi rodovne funkcije za izračun števila rešitev enačbe  $b_1 + b_2 + b_3 = 14$ , kjer  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}_0$ .

## 1.2 Catalanova števila

1. Imamo  $n \times n$  mrežo. Koliko poti dolžine  $2n$  ( $n$ -krat desno in  $n$ -krat dol), ki ne sekajo diagonale, vodi iz zgornjega levega kota v spodnji desni kot?
2. Na koliko načinov lahko 'zgradimo goro' iz  $n \setminus$  in  $n /$ ? (Gora se prične in konča na isti višini.)
3. Poišči število binarnih dreves s korenom na  $n$  vozliščih.
4. Na koliko načinov lahko trianguliramo pravilen  $n$ -kotnik?
5. Na koliko načinov lahko množico z  $n$  različnimi elementi razbijemo na unijo disjunktnih podmnožic?

## 1.3 Particija naravnega števila

1. Na koliko načinov lahko zamenjamo dolar, če imamo na voljo kovance po 25, 10 in 5 centov (vsakih je na voljo poljubno)?
2. Na koliko načinov lahko bankovec za 50 EUR zamenjamo za bankovce po 5, 10 in 20 EUR?
3. Dokaži, da za  $1 \leq k < n$  velja:  $p_k(n) = p_k(n - k) + p_{k-1}(n - k) + \dots + p_1(n - k)$ .
4. Dokaži:  $p_k(n) = p_{k-1}(n - 1) + p_k(n - k)$ .

## 1.4 Dodatne

1. Poišči rodovno funkcijo za število načinov izbire  $r$  kroglic iz posode s tremi zelenimi, tremi belimi, tremi modrimi in tremi srebrnimi kroglicami.