1 Linearna algebra v diskretni matematiki

1.1 Načrti

1. Šola dobi priznanje s strani likovnega društva, če učenci šole izdelajo 20 izdelkov. Vodstvo šole se odloči, da bodo delo porazdelili tako, da vsak učenec sodeluje pri izdelavi štirih izdelkov. Koliko učencev je na šoli, če veš, da pri izdelavi vsake trojice izdelkov sodeluje natanko en učenec?

2. Predpostavimo, da obstaja 2-načrt $(X, \mathcal{B})$ s parametri (v, k, λ_2). Dokaži, da je $(X, \{X \backslash B; B \in \mathcal{B}\}) = (X, \mathcal{B}')$ 2-načrt. Parametre $v', k', b', \lambda_1', \lambda_2'$ 2-načrta $(X, \mathcal{B}')$ izrazi s parametri $v, k, b, \lambda_1, \lambda_2$ 2-načrta $(X, \mathcal{B})$.

3. Naj bo $(X, \mathcal{B})$ 2-načrt s parametri $(v, k, 1)$ in $B \in \mathcal{B}$ poljuben. Dokaži, da za vsak $x \in X \setminus B$ obstaja natanko k blokov, ki vsebujejo x in imajo neprazen presek z B.

4. Naj bo $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 3, b \leq v$.

   (a) Dokaži, da obstaja 2-načrt s parametri $(v, v-1, v-2)$.

   (b) Ali obstaja 2-načrt s parametri $(v, v-1, \lambda_2)$, če $\lambda_2 \neq v-2$?

5. Naj bo $\mathcal{B}$ 2-načrt s parametri $(v, k, 1)$ in naj bo $v > k$. Dokaži, da je $b \geq v$.

6. Ali obstaja 2-načrt s parametri $(16, 6, 1)$?

7. Ali obstaja 2-načrt s parametri $(25, 10, 3)$?

1.2 Pokritja s polnimi dvodelnimi grafi

1. Za $n \geq 2$, poišči najmanjše število polnih dvodelnih grafov, s katerimi lahko pokrijemo povezave grafa $K_{n,n} \setminus \{x_1 y_n, x_n y_1\}$, če

   (a) povezave niso nujno disjunktne.

   (b) če so povezave disjunktne.

1.3 Prostori ciklov

1. Izračunaj $|\mathcal{K}_{K_n}|$.

2. Izračunaj $|\mathcal{K}_{K_{n,n}}|$.

3. Določi ciklometrično število (dimenzijo prostora ciklov) grafov $P_4 \Box P_3$ in $P_n \Box P_m$ mreže. Za $P_4 \Box P_3$ določi še bazo prostora ϵ.

4. Določi ciklometrično število in bazo prostora ϵ grafa $K_3 \Box K_2$.

5. Naj bo G ravninski 2-povezan graf. Dokaži, da cikli omejenih lic tvorijo bazo prostora ϵ.

1.4 Lastne vrednosti grafa

1. Naj bo A matrika sosednosti grafa G. Izračunaj $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

2. Poišči lastne vrednosti grafa $K_{2,3}$. Za vsako od njih izračunaj tudi lastni vektor.

3. Naj bo G k-regularen graf na n vozliščih in λ lastna vrednost grafa G z lastnim vektorjem u za katerega velja, da je $Ju = 0$. Dokaži, da je u lastni vektor grafa $\overline{G}$ za lastno vrednost $-1 - \lambda$.

4. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje grafa K_n.

5. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje polnega dvodelnega grafa $K_{m,n}$.