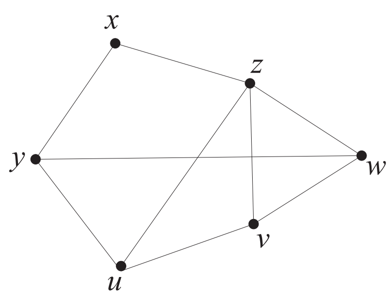
1 Ponovitev

1. Nariši graf G, če je $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$ in $E(G) = \{zy, yv, vz, uz, uv, uy\}$. Določi stopnje vozlišč grafa G, $\delta(G), \Delta(G)$ in nariši $\overline{G}$.

2. Nariši primer grafa na
   (a) štirih vozliščih s stopnjami: 1,2,2,3;
   (b) petih vozliščih s stopnjami: 1,3,3,4,4;
   (c) šestih vozliščih, ki ima vsa vozlišča lihe stopnje in vsaj eno vozlišče stopnje 5.

3. Podan je graf G na sliki 1.
   (a) Nariši primer podgrafa H grafa G, za katerega je $V(H) = \{x, z, u, v\}$.
   (b) Nariši primer podgrafa H grafa G, ki je induciran z vozlišči iz množice $\{x, z, u, v, y\}$.
   (c) Nariši primer vpetega podgrafa H grafa G.

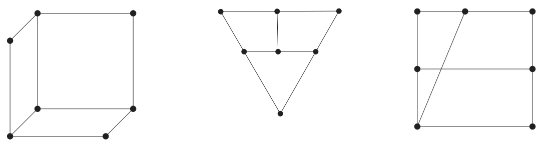


Slika 1: Graf G.

4. Dokaži, da ima graf G na vsaj dveh vozliščih, vsaj dve vozlišči iste stopnje.

5. Brane je skupaj s svojo ženo Ano priredil zabavo. Na zabavo so prišli še štirje drugi pari. Nekateri udeleženci so si na zabavi segli v roko z drugimi, medtem ko si nihče ni segel v roko s svojim partnerjem. Na koncu zabave je Brane vprašal ostale udeležence, s koliko osebami so se rokovali. Dobil je 9 različnih odgovorov. S koliko udeleženci se je rokovala Ana?

6. Kateri od grafov na sliki 2 so med seboj izomorfni?



Slika 2: Garfi in naloge 6.

7. Poišči primer asimetričnega grafa G (njegov edini avtomorfizem je identiteta) z $|V(G)| > 1$.

8. Pokaži, da ima vsak graf G, ki je izomorfen svojemu komplementu $4n$ ali $4n+1$ vozlišč.

9. Naj bo $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dokaži, da velja:

$$|E(G)| = \frac{\sum_{i=1}^{n} |E(G - v_i)|}{n-2}.$$

10. S pomočjo stopnje vozlišča g grafa G in vozlišča h grafa H zapiši stopnjo vozlišča (g, h) grafa $G \Box H$. Nariši graf $P_3 \Box K_3$.

1.1 Drevesa in dvodelni grafi

1. Drevo T ima štiri vozlišča stopnje 2, eno vozlišče stopnje 3, dve vozlišči stopnje 4 in eno vozlišče stopnje 5. Vozlišč višjih stopenj nima. Izračunaj koliko vozlišč stopnje 1 ima? Koliko vozliš in koliko povezav ima drevo T?

2. Naj bo $\mathcal{T}$ družina dreves, ki imajo vsa notranja vozlišča stopnje 3. Pokaži, da imajo drevesa družine $\mathcal{T}$ število listov za 2 večje od števila notranjih vozlišč.

3. Naj bo G k-regularen dvodelen graf s $k > 0$ in dvodelnim razbitjem $V(G) = X + Y$. Dokaži, da velja: $|X| = |Y|$.

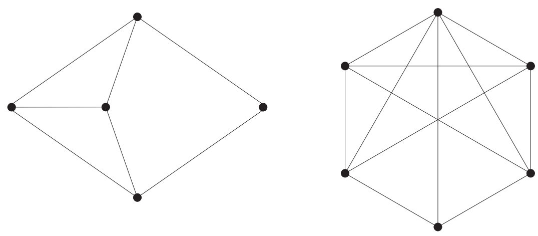
1.2 Barvanje vozlišč in povezav

1. Določi kromatično število grafov na sliki 3.

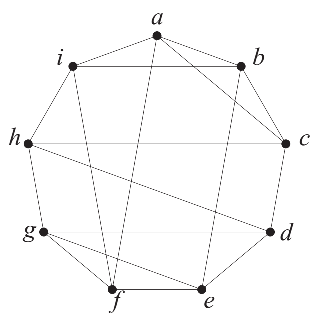
2. Naj bo $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definirajmo graf $G_{n,k}$ takole:

$$V(G_{n,k}) = \{Y \subseteq X;\ |Y| = k\},$$

$$E(G_{n,k}) = \{Y_1Y_2;\ Y_1, Y_2 \in V(G_{n,k}) \text{ in } |Y_1 \cap Y_2| = 1\}.$$



Slika 3: Grafa G, H.



Slika 4: Graf G.

(a) Nariši graf $G_{4,2}$.

(b) Določi kromatični indeks in kromatično število grafa $G_{4,2}$.

(c) Graf $G_{n,k}$ je očitno regularen. Določi njegovo stopnjo.

2 Povezanost

1. Naj bo G graf na $2n$ vozliščih in naj bo stopnja vsakega vozlišča vsaj n. Dokaži, da je G povezan.

2. Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev. Če sta u, v edini vozlišči stopnje 1 v G, potem v G obstaja u, v-pot.

3. Dokaži, da je graf G k-povezan natanko tedaj, ko je $G \vee K_r$ $(k+r)$-povezan.

4. Naj bo k sodo število. $H_{k,n}$ je graf na n vozliščih, ki ležijo na krogu tako da tvorijo vozlišča pravilnega n-kotnika. Vsako vozlišče je sosednje s $\frac{k}{2}$ najbližjimi vozlišči v vsako smer. Dokaži, da je $\kappa(H_{k,n}) = k$.

5. Konstruiraj graf G za katerega velja: $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$.

6. Dokaži, da za 3-regularne grafe velja $\kappa(G) = \lambda(G)$.

7. Brez uporabe Mengerjevega izreka dokaži, da je graf G z vsaj tremi vozlišči 2-povezan natanko tedaj, ko za poljubni vozlišči u, v grafa G obstajata notranje disjunktni u, v-poti v G.

8. Dokaži, da je graf G z $|V(G)| \geq 3$ in $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ Hamiltonov.

9. Naj bo G graf in $xy \in E(G)$. Dokaži: $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - xy) \leq \kappa(G)$.

10. Dokaži, da za poljubna grafa G in H velja

$$\kappa(G \square H) \leq \min\{\kappa(G)|V(H)|, \kappa(H)|V(G)|, \delta(G) + \delta(H)\}.$$

11. Naj bo G 4-regularen graf. Dokaži, da velja: $\lambda(G) \leq \kappa(G) + 2$.

12. Naj bo G graf z $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$. Dokaži, da je $\kappa(G) = \delta(G)$. Dokaži še, da za vsak $n \geq 4$ obstaja graf G z $\delta(G) < |V(G)| - 2$ za katerega velja $\kappa(G) \neq \delta(G)$.

3 Barvanja grafov

1. Naj bo G graf, katerega komplement je dvodelen. Dokaži, da je $\chi(G) = \omega(G)$.

2. Naj bo G poljuben graf za katerega velja $\chi(G) = \omega(G) + 1$. Naj bo $H_1 = G$ in $H_k = H_{k-1} \vee G$ za vsak $k > 1$. Dokaži, da velja $\chi(H_k) = \omega(H_k) + k$.

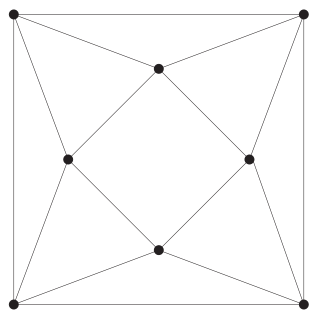
3. Dokaži, da so 3-regularni Hamiltonovi grafi tipa 1.

4. Dokaži, da je za vsak k-kritičen graf G $\delta(G) \geq k - 1$.

5. Naj bo G k-kriticen graf. Dokaži, da za poljubni vozlišci x in y velja $N(x) \nsubseteq N(y)$.

6. Poišči kromatično število grafa G na sliki 5. Ali je G kritičen graf? Če ni, poišči kak $\chi(G)$-kritičen podgraf od G.

7. Naj bo G združenje grafov C_5 in K_s. Določi kromatično in klično število grafa G. Ali je G barvno kritičen?



Slika 5: Graf G.

8. Dokaži, da je vsak k-kritičen graf 2-povezan.

9. Naj bo G k-kritičen graf.

   (a) Dokaži, da ne obstaja presečna množica vozlišč grafa G, ki je klika.

   (b) Naj bo $k = 4$. Dokaži, da je G bodisi liho kolo, bodisi ne vsebuje koles.

10. (Hojas-ova konstrukcije): Naj bosta G in H k-kritična grafa, z natanko enim skupnim vozliščem v in $vu \in E(G), vw \in E(H)$. Dokaži, da je $(G - vu) \cup (H - vw) \cup uw$ k-kritičen graf.

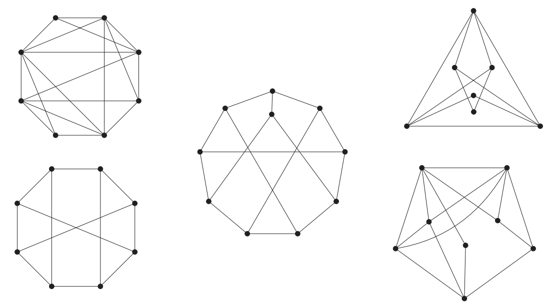
11. Za vsak $n \geq 4$ in $n \neq 5$ konstruiraj 4-kritičen graf na n vozliščih.

12. Dokaži, da je za vsak k-kromatičen graf G brez trikotnikov, Mycielskijeva konstrukcija G', $(k + 1)$-kromatičen graf brez trikotnikov.

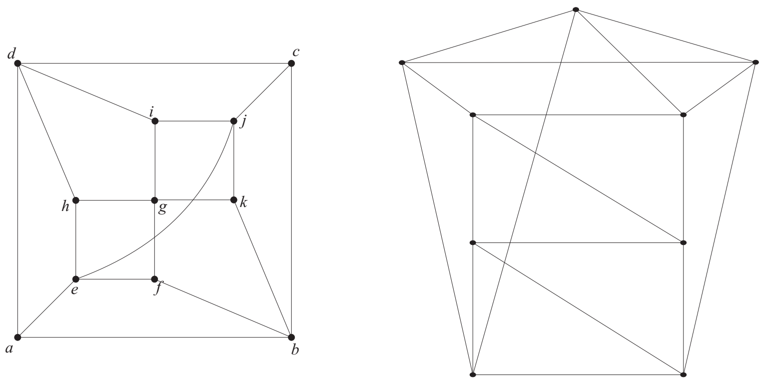
13. Dokaži: Če je G k-kritičen, potem je G' (Mycielskijeva konstrukcija) $(k + 1)$-kritičen.

4 Ravninski grafi

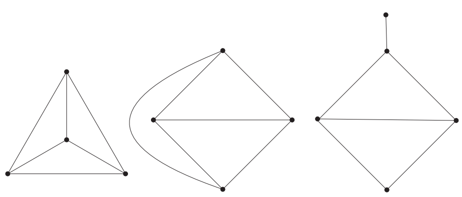
1. Kateri izmed grafov na sliki 6 so ravninski?



Slika 6: Grafi $G_1, \ldots, G_5$.



Slika 7: Grafa G in H.



Slika 8: Grafi G, H in K.

2. Dana sta grafa narisan na sliki 7. Ali je kateri izmed grafov ravninski?

3. Z uporabo Eulerjeve formule dokaži, da Petersenov graf ni ravninski.

4. Nariši dualne grafe grafov narisanih na sliki 8.
5. Naj bo G povezan ravninski graf. Dokaži, da je G dvodelen natanko tedaj, ko je njegov dual G^* Eulerjev.

AKTIVNOSTI	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
POTREBEN ČAS	4	3	7	4	6	5	2	5
OPRAVLJENE AKTIVNOSTI	-	-	α_1	α_1	α_2	α_4, α_5	α_3, α_6	α_4, α_5

Tabela 1: Aktivnosti na projektu.

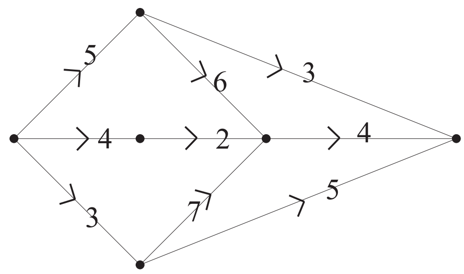
5 Omrežja in pretoki

1. Dokaži, da v vsakem turnirju obstaja usmerjena pot, ki vsebuje vsa vozlišča grafa.

2. Dokaži, da lahko ima turnir največ en izvor.

3. Tabela 1 označuje aktivnosti $\alpha_1, \ldots \alpha_8$, ki so vpletene v izvedbo nekega projekta. Podani so tudi časi potrebni za izvedbo določene aktivnosti. Vemo tudi katere aktivnosti morajo biti končane, preden lahko začnemo z izbrano aktivnostjo. Kolikšen je najmanjši potreben čas za izvedbo tega projekta?

4. Poišči največji pretok omrežja G na sliki 9.



Slika 9: Omrežje G.

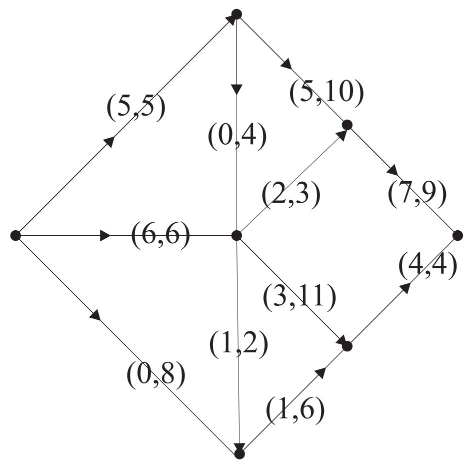
5. Izberi poljuben pretok f z vrednostjo 8 omrežja iz slike 9. Zapiši postopek za povečanje pretoka.

6. Diagram na sliki 10 predstavlja omrežje s kapacitetami in vrednostmi pretoka f.

   (a) Kolikšna je vrednost f?

   (b) Poišči nezasičeno f-pot in glede na njo povečaj pretok f.

   (c) Poišči prerez s kapaciteto 12.



Slika 10: Omrežje.

7. Z uporabo pretokov v omrežjih dokaži, da je graf G povezan natanko tedaj, ko za vsako particijo $V(G)$ na dve neprazni množici S, T obstaja povezava z enim krajiščem v S in drugim v T.

6 Neodvisnostno in dominantno število

1. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve.

   (a) Vsak k-kromatičen graf ima dobro k-barvanje, v katerem ima en bravni razred $\alpha(G)$ vozlišč.

   (b) Za vsak graf G je $\chi(G) \leq |V(G)| - \alpha(G) + 1$.

2. Dokaži:

   (a) $\alpha(G \Box H) \leq \min\{\alpha(G)|V(H)|, \alpha(H)|V(G)|\}$

   (b) $\alpha(G \Box H) \geq \alpha(G)\alpha(H) + \min\{|V(G)| - \alpha(G), |V(H)| - \alpha(H)\}$.

3. Dokaži $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \right\rceil$, $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$. Za vsako neenakost poišči primer grafa za katerega bo veljal enačaj.

4. Pokaži, da za netrivialen graf G velja $\alpha(G) \leq |V(G)| - \frac{|E(G)|}{\Delta(G)}$.

5. Dokaži: $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{deg_G(v)+1}$.

6. Dokaži, da je graf G m-pobarljiv natanko tedaj, ko je $\alpha(G \Box K_m) \geq |V(G)|$.

7. Dokaži, da je $\gamma(\overline{G}) \leq 2$, za vsak graf G z diametrom vsaj 3.

8. Dokaži, da za povezan graf G z diametrom 2 velja: $\gamma(G) \leq \delta(G)$.

9. Dokaži: $\alpha(G \boxtimes H) \geq \alpha(G \circ H) = \alpha(G)\alpha(H)$.

10. Naj bo G graf brez izoliranih vozlišc in naj bo D najmanjša dominantna množica grafa G. Dokaži, da je $D = V(G) - D$ tudi dominantna množica grafa G. S pomočjo tega dokaži, da je $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

11. Naj bo G graf, ki ne vsebuje $K_{1,3}$ kot induciran podgraf. Dokaži, da je $\gamma(G) = i(G)$.