KORENI

Definicija 1 *Naj bo x poljubno nenegativno realno število in $m \in \mathbb{N}$. Tedaj nenegativno realno število y, za katerega je $y^m = x$, označimo z*

$$\sqrt[m]{x}.$$

Število $\sqrt[m]{x}$ imenujemo m-ti koren števila x.

Trditev 2 *Za poljubni pozitivni števili $x, y \in \mathbb{R}$ in za poljubna naravna števila m, n, k in ℓ velja*

1. $\sqrt[m]{0} = 0$ *in* $\sqrt[m]{1} = 1$,
2. $\sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}$,
3. $\sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$,
4. $\sqrt[m]{x^n} = (\sqrt[m]{x})^n$,
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$,
6. $\sqrt[k \cdot m]{x^{k \cdot n}} = \sqrt[m]{x^n}$,
7. $\sqrt[m]{x^n} \cdot \sqrt[k]{x^\ell} = \sqrt[m \cdot k]{x^{\ell \cdot m + n \cdot k}}$,
8. *Neenakost* $\sqrt[n]{x} < 1$ *velja natanko tedaj, ko je* $x < 1$,
9. *Neenakost* $\sqrt[n]{x} > 1$ *velja natanko tedaj, ko je* $x > 1$,
10. *Enakost* $\sqrt[n]{x} = 1$ *velja natanko tedaj, ko je* $x = 1$,
11. *Neenakost* $\sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{y}$ *velja natanko tedaj, ko je* $x < y$,
12. *Enakost* $\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{y}$ *velja natanko tedaj, ko je* $x = y$,
13. *Neenakost* $\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$ *velja natanko tedaj, ko je bodisi* $m > n$ *in* $x > 1$ *bodisi* $m < n$ *in* $x < 1$.
14. *Enakost* $\sqrt[m]{x} = \sqrt[n]{x}$ *velja natanko tedaj, ko je* $m = n$ *ali* $x = 1$.

Dokaz. Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}$ poljubni nenegativni števili in m, n, k in ℓ poljubna naravna števila.

1. Trditvi $\sqrt[m]{0} = 0$ in $\sqrt[m]{1} = 1$ sta očitno resnični.
2. Naj bo $c = \sqrt[m]{x \cdot y}$, $a = \sqrt[m]{x}$ in $b = \sqrt[m]{y}$. Tedaj je $c^m = x \cdot y$, $a^m = x$ in $b^m = y$. Sledi, da je $c^m = a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ po trditvi o potencah s celimi eksponenti. Zato je $c = a \cdot b$. Tako smo dokazali zvezo $\sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}$.

3. Naj bo $c = \sqrt[m]{\frac{x}{y}}$, $a = \sqrt[m]{x}$ in $b = \sqrt[m]{y}$. Tedaj je $c^m = \frac{x}{y}$, $a^m = x$ in $b^m = y$. Sledi, da je $c^m = \frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$ po trditvi o potencah s celimi eksponenti. Zato je $c = \frac{a}{b}$. Tako smo dokazali zvezo $\sqrt[m]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$.

4. Naj bo $a = (\sqrt[m]{x})^n$. Sledi, da je $\sqrt[m]{x} = \sqrt[n]{a}$ in zato $x^n = a^m$. Tako smo dokazali enakost $\sqrt[m]{x^n} = (\sqrt[m]{x})^n$.

5. Naj bo $a = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$. Tedaj je $a^m = \sqrt[n]{x}$ in zato je $(a^m)^n = x$. Po trditvi o potencah s celimi eksponenti je $x = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Tedaj je $a = \sqrt[m \cdot n]{x}$. Tako smo dokazali enakost $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$.

6. Naj bo $a = \sqrt[k \cdot m]{x^{k \cdot n}}$. Tedaj je $a^{k \cdot m} = x^{k \cdot n}$. Ker je $x > 0$, je

$$1 = \frac{a^{k \cdot m}}{x^{k \cdot n}} = \frac{(a^m)^k}{(x^n)^k} = \left(\frac{a^m}{x^n}\right)^k$$

po trditvi o potencah s celimi eksponenti. Tedaj velja, da je $\frac{a^m}{x^n} = 1$. Tako je $a^m = x^n$ in je zato $a = \sqrt[m]{x^n}$. Tako smo dokazali enakost $\sqrt[k \cdot m]{x^{k \cdot n}} = \sqrt[m]{x^n}$.

7. Naj bo $a = \sqrt[m]{x^n}$, $b = \sqrt[k]{x^\ell}$ in $c = \sqrt[m \cdot k]{x^{\ell \cdot m + n \cdot k}}$. Tedaj je $a^m = x^n$, $b^k = x^\ell$ in $c^{m \cdot k} = x^{\ell \cdot m + n \cdot k}$. Ker je

$$c^{m \cdot k} = x^{\ell \cdot m + n \cdot k} = x^{\ell \cdot m} \cdot x^{n \cdot k} = (x^\ell)^m \cdot (x^n)^k = (b^k)^m \cdot (a^m)^k = a^{m \cdot k} \cdot b^{m \cdot k} = (a \cdot b)^{m \cdot k},$$

sledi, da je $c = a \cdot b$. Tako smo dokazali enakost $\sqrt[m]{x^n} \cdot \sqrt[k]{x^\ell} = \sqrt[m \cdot k]{x^{\ell \cdot m + n \cdot k}}$.

8. Neenakost $\sqrt[n]{x} < 1$ velja natanko tedaj, ko je $x < 1^n$ po trditvi o potencah z n aravnimi eksponenti (točka 9.). Tako je trditev dokazana.

9. Neenakost $\sqrt[n]{x} > 1$ velja natanko tedaj, ko je $x > 1^n$ po trditvi o potencah z naravnimi eksponenti (točka 8.). Tako je trditev dokazana.

10. Enakost $\sqrt[n]{x} = 1$ velja natanko tedaj, ko je $x = 1^n$ po trditvi o potencah z naravnimi eksponenti (točka 10.). Tako je trditev dokazana.

11. Naj bo $x < y$. Recimo, da je $\sqrt[m]{x} \geq \sqrt[m]{y}$. Če je $\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{y}$, tedaj je $x = y$—protislovje. Če je $\sqrt[m]{x} > \sqrt[m]{y}$, tedaj je po trditvi o potencah s celimi eksponenti $x > y$—protislovje. Dokazali smo, da je $\sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{y}$. Tako smo dokazali, da je $\sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{y}$ natanko tedaj, ko je $x < y$.

12. Če je $x = y$, tedaj je seveda $\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{y}$. Če je $x \neq y$, je po točki 11., $\sqrt[m]{x} \neq \sqrt[m]{y}$. Tako je ekvivalenca dokazana.

13. Ker velja

$$\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n < x^m,$$

sledi po trditvi o potencah s celimi eksponenti (točka 13.), da neenakost $\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $m > n$ in $x > 1$ bodisi $m < n$ in $x < 1$.

14. Ker velja

$$\sqrt[m]{x} = \sqrt[n]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = x^m,$$

sledi po trditvi o potencah s celimi eksponenti (točka 14.), da enakost $\sqrt[m]{x} = \sqrt[n]{x}$ velja natanko tedaj, ko je $m = n$ ali $x = 1$.