POTENCE S CELIM EKSPOMENTOM

Definicija 1 *Naj bo* $a > 0$. *Tedaj za poljubno naravno število* n *definiramo potenco* a^{-n} *takole*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Trditev 2 *Naj bosta $a, b > 0$. Tedaj so za poljubna $k, \ell \in \mathbb{Z}$ naslednje trditve resnične.*

1. $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$.
2. $\dfrac{1}{a^k} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^k = a^{-k}$.
3. $\dfrac{a^k}{a^\ell} = a^{k-\ell}$.
4. $(a^k)^\ell = a^{k\cdot\ell}$.
5. $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$.
6. $\dfrac{a^k}{b^k} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^k$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^k$.
8. *Neenakost $a^k > 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $k > 0$ bodisi $a < 1$ in $k < 0$.*
9. *Neenakost $a^k < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $k < 0$ bodisi $a < 1$ in $k > 0$.*
10. *Enakost $a^k = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $k = 0$.*
11. *Neenakost $a^k < b^k$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $k > 0$ bodisi $a > b$ in $k < 0$.*
12. *Enakost $a^k = b^k$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $k = 0$.*
13. *Neenakost $a^k < a^\ell$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $\ell > k$ bodisi $a < 1$ in $\ell < k$.*
14. *Enakost $a^k = a^\ell$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $\ell = k$.*

Dokaz. Naj bosta $a, b > 0$.

1. Če je $k = 0$, enakost $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$ očitno velja za vsak $\ell \in \mathbb{Z}$, saj
$$a^k \cdot a^\ell = a^0 \cdot a^\ell = 1 \cdot a^\ell = a^\ell = a^{0+\ell} = a^{k+\ell}$$
za vsak $\ell \in \mathbb{Z}$. Podobno, če je $\ell = 0$, enakost $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$ očitno velja za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Za poljubna $k, \ell \in \mathbb{N}$, smo enakost $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$ dokazali v trditvi o potenceh z naravnim eksponentom. Preostanejo še naslednji primeri.

(a) Dokažimo, da za poljubni $k, \ell \in \mathbb{N}$ velja $a^k \cdot a^{-\ell} = a^{k+(-\ell)}$. Naj bosta $k, \ell \in \mathbb{N}$ poljubna. Tedaj velja (upoštevajoč trditev o potenceh z naravnim eksponentom)

$$a^k \cdot a^{-\ell} = a^k \cdot \frac{1}{a^\ell} = \frac{a^k}{a^\ell} = a^{k+(-\ell)},$$

če je $k \geq \ell$ in

$$a^k \cdot a^{-\ell} = a^k \cdot \frac{1}{a^\ell} = \frac{a^k}{a^\ell} = \frac{1}{a^{\ell-k}} = \frac{1}{a^{-(k-\ell)}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{k-\ell}}} = a^{k-\ell} = a^{k+(-\ell)},$$

če je $k \leq \ell$.

(b) Dokaz, da za poljubni $k, \ell \in \mathbb{N}$ velja $a^{-k} \cdot a^\ell = a^{(-k)+\ell}$, prepuščamo bralcu.

(c) Dokažimo, da za poljubni $k, \ell \in \mathbb{N}$ velja $a^{-k} \cdot a^{-\ell} = a^{(-k)+(-\ell)}$. Naj bosta $k, \ell \in \mathbb{N}$ poljubna. Tedaj velja (upoštevajoč trditev o potenceh z naravnim eksponentom)

$$a^{-k} \cdot a^{-\ell} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^\ell} = \frac{1}{a^k \cdot a^\ell} = \frac{1}{a^{k+\ell}} = a^{-(k+\ell)} = a^{(-k)+(-\ell)}.$$

Tako je enakost $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$ dokazana.

2. Ker za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ velja

$$a^k \cdot a^{-k} = a^{k+(-k)} = a^0 = 1,$$

je enakost $\frac{1}{a^k} = a^{-k}$ dokazana. Ker za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ velja še, da je

$$a^k \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^k = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right)^k = 1^k = 1,$$

je dokazana še enakost $\frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$.

3. Naj bo Naj bosta k in ℓ poljubni celi števili. Tedaj velja

$$\frac{a^k}{a^\ell} = a^k \cdot \frac{1}{a^\ell} = a^k \cdot a^{-\ell} = a^{k+(-\ell)} = a^{k-\ell},$$

in enakost $\frac{a^k}{a^\ell} = a^{k-\ell}$ je dokazana.

4. Naj bosta $k, \ell \in \mathbb{Z}$ poljubna. Oglejmo si spodnje možnosti.

   (a) Če je $k, \ell > 0$, je to trditev o potenceh z naravnim eksponentom.

   (b) Če je $k = 0$, tedaj je

   $$(a^k)^\ell = (a^0)^\ell = 1^\ell = 1 = a^0 = a^{0\cdot\ell} = a^{k\cdot\ell}.$$

   (c) Če je $\ell = 0$, tedaj je

   $$(a^k)^\ell = (a^k)^0 = 1 = a^0 = a^{k\cdot 0} = a^{k\cdot\ell}.$$

   (d) Če je $k > 0$ in $\ell < 0$, tedaj je

   $$(a^k)^\ell = \frac{1}{(a^k)^{-\ell}} = \frac{1}{a^{k\cdot(-\ell)}} = \frac{1}{a^{-k\cdot\ell}} = a^{k\cdot\ell}.$$

   (e) Če je $k < 0$ in $\ell > 0$, tedaj je

   $$(a^k)^\ell = \left(\frac{1}{a^{-k}}\right)^\ell = \frac{1}{(a^{-k})^\ell} = \frac{1}{a^{(-k)\ell}} = \frac{1}{a^{-k\cdot\ell}} = a^{k\cdot\ell}.$$

   (f) Če je $k < 0$ in $\ell < 0$, tedaj je

   $$(a^k)^\ell = \frac{1}{(a^k)^{-\ell}} = \frac{1}{a^{k\cdot(-\ell)}} = \frac{1}{a^{-k\cdot\ell}} = a^{k\cdot\ell}.$$

5. Naj bo $k \in \mathbb{Z}$ poljuben. Če je $k > 0$, tedaj je $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$ po trditvi o potenceh z naravnim eksponentom. Če je $k = 0$, tedaj je

   $$a^k \cdot b^k = a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (a \cdot b)^0 = (a \cdot b)^k.$$

   Če je $k < 0$, tedaj je

   $$a^k \cdot b^k = \frac{1}{a^{-k}} \cdot \frac{1}{b^{-k}} = \frac{1}{a^{-k} \cdot b^{-k}} = \frac{1}{(a \cdot b)^{-k}} = (a \cdot b)^k.$$

6. Naj bo $k \in \mathbb{Z}$ poljuben. Tedaj velja

   $$\frac{a^k}{b^k} = a^k \cdot \frac{1}{b^k} = a^k \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^k = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k.$$

7. Naj bo $k \in \mathbb{Z}$ poljuben. Tedaj velja

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^k} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^k = \left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

8. Recimo, da ni res, da je bodisi $a > 1$ in $k > 0$ bodisi $a < 1$ in $k < 0$. Tedaj velja ena izmed spodnjih možnosti.

   (a) Velja $a > 1$ in $k \leq 0$. Če je $k = 0$, sledi, da je $a^k = 1$ in zato $a^k \not> 1$. Če je $k < 0$, tedaj velja po trditvi o potenceh z naravnim eksponentom (ker je $-k \in \mathbb{N}$ in $\frac{1}{a} < 1$), da je $a^k = (\frac{1}{a})^{-k} < 1$ in je zato $a^k \not> 1$.

   (b) Velja $a < 1$ in $k \geq 0$. Če je $k = 0$, sledi, da je $a^k = 1$ in zato $a^k \not> 1$. Če je $k > 0$, tedaj velja po trditvi o potenceh z naravnim eksponentom (ker je $k \in \mathbb{N}$ in $a < 1$), da je $a^k < 1$ in zato $a^k \not> 1$.

   (c) Velja $a \leq 1$ in $k > 0$. Če je $a = 1$, sledi, da je $a^k = 1$ in zato $a^k \not> 1$. Če je $a < 1$, tedaj velja po trditvi o potenceh z naravnim eksponentom (ker je $k \in \mathbb{N}$ in $a < 1$), da je $a^k < 1$ in zato $a^k \not> 1$.

   (d) Velja $a \geq 1$ in $k < 0$. Če je $a = 1$, sledi, da je $a^k = 1$ in zato $a^k \not> 1$. Če je $a > 1$, tedaj velja po trditvi o potenceh z naravnim eksponentom (ker je $-k \in \mathbb{N}$ in $\frac{1}{a} < 1$), da je $a^k = (\frac{1}{a})^{-k} < 1$ in je zato $a^k \not> 1$.

   Tako smo dokazali implikacijo, da iz $a^k > 1$ sledi bodisi $a > 1$ in $k > 0$ bodisi $a < 1$ in $k < 0$. Predpostavimo še, da velja bodisi $a > 1$ in $k > 0$ bodisi $a < 1$ in $k < 0$ in dokažimo, da je $a^k > 1$. Če je $a > 1$ in $k > 0$, tedaj je po trditvi o potenceh z naravnim eksponentom $a^k > 1$. Če je $a < 1$ in $k < 0$, tedaj je potrditvi o potenceh z naravnim eksponentom (saj je $-k \in \mathbb{N}$ in $\frac{1}{a} > 1$) $a^k = (\frac{1}{a})^{-k} > 1$.

9. Dokaz, da neenakost $a^k < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $k < 0$ bodisi $a < 1$ in $k > 0$, dokažemo podobno kot zgoraj. Podrobnosti prepuščamo bralcu.

10. Očitno velja, da je $a^k = 1$, če je $a = 1$ ali $k = 0$. Če $a \neq 1$ in $k \neq 0$, po zgornjih trditvah velja, da $a^k \neq 1$, saj je v tem primeru bodisi $a^k > 1$ bodisi $a^k < 1$. Tako je dana enakost dokazana.

11. Neenakost $a^k < b^k$ velja natanko tedaj, ko je $(\frac{a}{b})^k < 1$, le-to pa velja natanko tedaj, ko je bodisi $\frac{a}{b} < 1$ in $k > 0$ bodisi $\frac{a}{b} > 1$ in $k < 0$. Sledi, da neenakost $a^k < b^k$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $k > 0$ bodisi $a > b$ in $k < 0$.

12. Če je $a = b$ ali je $k = 0$, je seveda $a^k = b^k$. Če je $k \neq 0$ in $a \neq b$, tedaj je po točki 11., $a^k \neq b^k$. Tako smo dokazali, da enakost $a^k = b^k$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $k = 0$.

13. Neenakost $a^k < a^\ell$ velja natanko tedaj, ko je $a^{k-\ell} < 1$, ta neenakost pa velja natanko tedaj, ko velja bodisi $a > 1$ in $k - \ell < 0$ bodisi $a < 1$ in $k - \ell > 0$.

Torej velja, da je $a^k < a^\ell$ natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $\ell > k$ bodisi $a < 1$ in $\ell < k$.

14. Če je $a = 1$ ali je $\ell = k$, je očitno $a^k = a^\ell$. Če je $a \neq 1$ in je $\ell \neq k$, je po točki 13., $a^k \neq a^\ell$. Tako smo dokazali, da je $a^k = a^\ell$ natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $\ell = k$.