POTENCE Z NARAVNIM EKSPOMENTOM

Definicija 1 *Za poljuben $a > 0$ in za poljubno nenegativno celo število n, je potenca a^n definirana takole:*

1. $a^0 = 1$,
2. $a^1 = a$,
3. *Denimo, da je n poljubno naravno število in da smo že definirali potenco a^n. Tedaj definiramo*
$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Opomba 2 *Zgornja definicija ne zajema $a = 0$. V tem primeru definiramo $0^0 = 1$ in $0^n = 0$ za vsako naravno število n.*

Trditev 3 *Naj bosta $a, b > 0$. Tedaj so za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ naslednje trditve resnične.*

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. *Če je $n \geq m$, tedaj je* $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
3. *Če je $n \leq m$, tedaj je* $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^{m-n}}$.
4. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
5. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
6. $\dfrac{1}{b^n} = \left(\dfrac{1}{b}\right)^n$.
7. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.
8. *Neenakost $a^n > 1$ velja natanko tedaj, ko je $a > 1$.*
9. *Neenakost $a^n < 1$ velja natanko tedaj, ko je $a < 1$.*
10. *Enakost $a^n = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$.*
11. *Neenakost $a^n < b^n$ velja natanko tedaj, ko je $a < b$.*
12. *Enakost $a^n = b^n$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$.*
13. *Če je $m < n$, velja neenakost $a^m < a^n$ natanko tedaj, ko je $a > 1$. Če je $m > n$, velja neenakost $a^m < a^n$ natanko tedaj, ko je $a < 1$.*

Dokaz. Naj bosta $a, b > 0$.

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. S popolno indukcijo bomo dokazali, da je $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ za vsako naravno število m. Če je $m = 1$, je po definiciji potence z naravnim eksponentom

   $$a^n \cdot a^m = a^n \cdot a^1 = a^{n+1} = a^{n+m}.$$

   Naj bo m poljubno naravno število in recimo, da smo že dokazali enakost $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Tedaj je po definiciji potence z naravnim eksponentom

   $$a^n \cdot a^{m+1} = a^n \cdot (a^m \cdot a) = (a^n \cdot a^m) \cdot a = a^{n+m} \cdot a = a^{(n+m)+1} = a^{n+(m+1)}$$

   in enakost je dokazana.

2. Naj bo $m \in \mathbb{N}$ poljuben. S popolno indukcijo bomo dokazali, da je vsako naravno število $n \geq m$ velja $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Če je $n = m$, tedaj velja

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{n-m}.$$

Naj bo $n \geq m$ in recimo, da smo že dokazali enakost $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Tedaj velja

$$\frac{a^{n+1}}{a^m} = \frac{a^n \cdot a}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} \cdot \frac{a}{1} = a^{n-m} \cdot a = a^{n-m+1} = a^{(n+1)-m}$$

in enakost $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ je dokazana.

3. Naj bo $n \leq m$. Ker po točki 1. velja

$$\frac{a^n}{a^m} \cdot a^{m-n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^m} = \frac{a^{n+(m-n)}}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} = 1,$$

je enakost $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$ dokazana.

4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. S popolno indukcijo bomo dokazali, da je $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ za vsako naravno število m. Če je $m = 1$, je po definiciji potence z naravnim eksponentom

$$(a^n)^m = (a^n)^1 = a^n = a^{n \cdot 1} = a^{n \cdot m}.$$

Naj bo m poljubno naravno število in recimo, da smo že dokazali enakost $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Tedaj po definiciji potence z naravnim eksponentom in po točki 1. velja

$$(a^n)^{m+1} = (a^n)^m \cdot a^n = a^{n \cdot m} \cdot a^n = a^{n \cdot m + n} = a^{n \cdot (m+1)}$$

in enakost je dokazana.

5. S popolno indukcijo bomo dokazali, da je $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ za vsako naravno število n. Če je $n = 1$, je po definiciji potence z naravnim eksponentom

$$a^n \cdot b^n = a^1 \cdot b^1 = a \cdot b = (a \cdot b)^1 = (a \cdot b)^n.$$

Naj bo n poljubno naravno število in recimo, da smo že dokazali enakost $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Tedaj po definiciji potence z naravnim eksponentom velja

$$a^{n+1} \cdot b^{n+1} = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^{n+1}$$

in enakost je dokazana.

6. Naj bo n poljubno naravno število. Ker po točki 5. velja

$$b^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(b \cdot \frac{1}{b}\right)^n = 1^n = 1,$$

je enakost $\frac{1}{b^n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n$ dokazana.

7. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Tedaj velja, upoštevajoč točko 6., da je

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

in enakost je dokazana.

8. Ker je $a > 1$, je $a^2 > 1$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben in predpostavimo, da smo dokazali, da je $a^n > 1$. Tedaj velja $a^{n+1} > 1$.

9. Ker je $a < 1$, je $a^2 < 1$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben in predpostavimo, da smo dokazali, da je $a^n < 1$. Tedaj velja $a^{n+1} < 1$.

10. Očitno je $a^n = 1$ natanko tedaj, ko je $a = 1$.

11. Naj bo n poljubno naravno število. Tedaj velja

$$a^n < b^n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a^n}{b^n} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{b} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a < b.$$

12. Naj bo n poljubno naravno število. Če je $a = b$, tedaj je očitno $a^n = b^n$. Recimo, da je $a \neq b$. Tedaj je po točki 11., $a^n \neq b^n$. Tako smo dokazali, da je $a = b$ natanko tedaj, ko je $a^n = b^n$.

13. Naj bo $m < n$. Tedaj je

$$a^m < a^n \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < a^{n-m} \quad \Longleftrightarrow \quad a > 1.$$

Naj bo $m > n$. Tedaj je

$$a^m < a^n \quad \Longleftrightarrow \quad a^{m-n} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a < 1.$$