POTENCE Z RACIONALNIM EKSPONENTOM

Definicija 1 *Naj bo $a > 0$. Tedaj za poljubni $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, definiramo*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Trditev 2 *Naj bosta $a, b > 0$. Tedaj so za poljubna $p, q \in \mathbb{Q}$ naslednje trditve resnične.*

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.
2. $\dfrac{1}{a^p} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^p = a^{-p}$.
3. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.
4. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$.
5. $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$.
6. $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^p$.
8. *Neenakost $a^p > 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p > 0$ bodisi $a < 1$ in $p < 0$.*
9. *Neenakost $a^p < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p < 0$ bodisi $a < 1$ in $p > 0$.*
10. *Enakost $a^p = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $p = 0$.*
11. *Neenakost $a^p < b^p$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $p > 0$ bodisi $a > b$ in $p < 0$.*
12. *Enakost $a^p = b^p$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $p = 0$.*
13. *Neenakost $a^p < a^q$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $q > p$ bodisi $a < 1$ in $q < p$.*
14. *Enakost $a^p = a^q$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $p = q$.*

Dokaz. Naj bosta $a, b > 0$ in $p, q \in \mathbb{Q}$.

1. Naj bo $p = \frac{m}{n}$ in $q = \frac{k}{\ell}$, kjer so $m, n, k, \ell \in \mathbb{Z}$ in $n, \ell \neq 0$. Tedaj je

$$a^p \cdot a^q = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[\ell]{a^k} = \sqrt[n \cdot \ell]{a^{m \cdot \ell + k \cdot n}} = a^{\frac{m \cdot \ell + k \cdot n}{n \cdot \ell}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{\ell}} = a^{p+q}.$$

2. Naj bo $p = \frac{m}{n}$. Ker je

$$a^p \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^p = a^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^m} = \sqrt[n]{\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)^m} = \sqrt[n]{1^m} = 1$$

in

$$a^p \cdot a^{-p} = a^{p+(-p)} = a^{p-p} = a^0 = 1,$$

je enakost $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p = a^{-p}$ dokazana.

3. Ker je

$$\frac{a^p}{a^q} = a^p \cdot a^{-q} = a^{p+(-q)} = a^{p-q}$$

je enakost dokazana.

4. Naj bo $p = \frac{m}{n}$ in $q = \frac{k}{\ell}$. Ker je

$$(a^p)^q = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{k}{\ell}} = \sqrt[\ell]{(a^{\frac{m}{n}})^k} = \sqrt[\ell]{(\sqrt[n]{a^m})^k} = \sqrt[\ell]{\sqrt[n]{(a^m)^k}} = \sqrt[\ell \cdot n]{a^{m \cdot k}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot \ell}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{\ell}} = a^{p \cdot q},$$

je enakost $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ dokazana.

5. Naj bo $p = \frac{m}{n}$. Ker je

$$a^p \cdot b^p = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^p,$$

je enakost $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ dokazana.

6. Ker je

$$\frac{a^p}{b^p} = a^p \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^p = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p,$$

je enakost $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$ dokazana.

7. Ker je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^p = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

je enakost $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$ dokazana.

8. Naj bo $p = \frac{m}{n}$, $n > 0$. Tedaj velja, da je

$$a^p > 1 \iff \sqrt[n]{a^m} > 1.$$

Po trditvi o korenih (točka 9.) je torej

$$a^p > 1 \iff a^m > 1$$

in po trditvi o potencah s celimi eksponenti (točka 8.) je neenakost $a^m > 1$ izpolnjena natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $m > 0$ bodisi $a < 1$ in $m < 0$. Torej je neenakost $a^p > 1$ izpolnjena natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p > 0$ bodisi $a < 1$ in $p < 0$.

9. Naj bo $p = \frac{m}{n}$, $n > 0$. Tedaj velja, da je

$$a^p < 1 \iff \sqrt[n]{a^m} < 1.$$

Po trditvi o korenih (točka 8.) je torej

$$a^p < 1 \iff a^m < 1$$

in po trditvi potencah s celimi eksponenti (točka 9.) je neenakost $a^m < 1$ izpolnjena natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $m < 0$ bodisi $a < 1$ in $m > 0$. Torej je neenakost $a^p < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p < 0$ bodisi $a < 1$ in $p > 0$.

10. Naj bo $p = \frac{m}{n}$, $n > 0$. Tedaj velja, da je

$$a^p = 1 \iff \sqrt[n]{a^m} = 1.$$

Po trditvi o korenih (točka 10.) je torej

$$a^p = 1 \iff a^m = 1$$

in po trditvi o potencah s celimi eksponenti (točka 10.) je neenakost $a^m = 1$ izpolnjena natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $m = 0$. Torej enakost $a^p = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $p = 0$.

11. Ker je

$$a^p < b^p \iff \left(\frac{a}{b}\right)^p < 1,$$

je po točki 9. neenakost $a^p < b^p$ izpolnjena natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $p > 0$ bodisi $a > b$ in $p < 0$.

12. Ker je

$$a^p = b^p \iff \left(\frac{a}{b}\right)^p = 1,$$

je po točki 10. enakost $a^p = b^p$ izpolnjena natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $p = 0$.

13. Naj bo $p = \frac{m}{n}$ in $q = \frac{k}{\ell}$, $n, \ell > 0$. Tedaj je

$$a^p < a^q \iff \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[\ell]{a^k} \iff a^{\ell \cdot m} < a^{k \cdot n}.$$

Po trditvi o potencah s celimi eksponenri (točka 13.) velja, da je $a^{\ell \cdot m} < a^{k \cdot n}$ natanko tedaj, ko je bodisi $\ell \cdot m < k \cdot n$ in $a > 1$ bodisi $\ell \cdot m > k \cdot n$ in $a < 1$. Zato je neenakost $a^p < a^q$ izpolnjena natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $q > p$ bodisi $a < 1$ in $q < p$.

14. Naj bo $p = \frac{m}{n}$ in $q = \frac{k}{\ell}$, $n, \ell > 0$. Tedaj je

$$a^p = a^q \iff \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\ell]{a^k} \iff a^{\ell \cdot m} = a^{k \cdot n}.$$

Po trditvi o potencah s celimi eksponenti (točka 14.) velja, da je $a^{\ell \cdot m} = a^{k \cdot n}$ natanko tedaj, ko je $\ell \cdot m = k \cdot n$ ali $a = 1$. Zato enakost $a^p = a^q$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $p = q$.