POTENCE Z REALNIM EKSPONENTOM

Definicija 1 *Naj bo $a > 0$ in $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je potenca a^x definirana s formulo*

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n},$$

kjer je q poljubno konvergentno zaporedje racionalnih števil, tako da je

$$\lim_{n\to\infty} q_n = x.$$

Vaja 2 *Rešite spodnje naloge.*

1. *Naj bosta $a > 0$ ter $q \in \mathbb{Q}$ in naj bo p konvergentno zaporedje racionalnih števil. Dokažite, da je tedaj*

$$(\lim_{n\to\infty} a^{p_n})^q = \lim_{n\to\infty} a^{p_n \cdot q}.$$

2. *Naj bosta $a > 0$ ter $x \in \mathbb{R}$ in naj bo b poljubno zaporedje (ne nujno racionalnih števil), tako da je $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. Dokažite, da je tedaj*

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^x.$$

3. *Naj bodo $a > 0$ ter $x, y \in \mathbb{R}$ in naj bo p zaporedje racionalnih števil, tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = x$. Dokažite, da je tedaj*

$$\lim_{n\to\infty} a^{y \cdot p_n} = a^{y \cdot x}.$$

Trditev 3 *Naj bosta $a, b > 0$. Tedaj so za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ naslednje trditve resnične.*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
5. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
6. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$.
8. *Neenakost $a^x > 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x > 0$ bodisi $a < 1$ in $x < 0$.*
9. *Neenakost $a^x < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x < 0$ bodisi $a < 1$ in $x > 0$.*
10. *Enakost $a^x = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $x = 0$.*
11. *Neenakost $a^x < b^x$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $x > 0$ bodisi $a > b$ in $x < 0$.*
12. *Enakost $a^x = b^x$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $x = 0$.*
13. *Neenakost $a^x < a^y$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $y > x$ bodisi $a < 1$ in $y < x$.*
14. *Enakost $a^x = a^y$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $x = y$.*

Dokaz. Naj bodo $x, y \in \mathbb{R}$ in $a, b > 0$ poljubni.

1. Naj bosta p in q zaporedji racionalnih števil, tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = x$ in $\lim_{n\to\infty} q_n = y$. Tedaj je

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n\to\infty} a^{p_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty}(a^{p_n} \cdot a^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{p_n+q_n} = a^{x+y}$$

in enakost $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ je dokazana.

2. Naj bo p zaporedje racionalnih števil, tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = x$. Tedaj je

$$a^x\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^x = \lim_{n\to\infty} a^{p_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a^{p_n}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{p_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty} 1^{p_n} = 1.$$

Zato je $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Ker je še po točki 1.

$$a^x\cdot a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^{x-x} = a^0 = 1,$$

smo dokazali še, da je $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$.

3. Ker je

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x\cdot a^{-y} = a^{x+(-y)} = a^{x-y},$$

je tako enakost $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ dokazana.

4. Naj bosta p in q zaporedji racionalnih števil, tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = x$ in $\lim_{n\to\infty} q_n = y$. Tedaj je

$$(a^x)^y = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a^{p_n})^{q_m}.$$

Za vsako naravno število m je (glej vajo 2 primer 1.)

$$(\lim_{n\to\infty} a^{p_n})^{q_m} = \lim_{n\to\infty} a^{p_n\cdot q_m}$$

in je zato (glej vajo 2 primer 3.)

$$(a^x)^y = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a^{p_n\cdot q_m}) = \lim_{m\to\infty} a^{x\cdot q_m} = a^{x\cdot y}$$

in enakost $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$ je dokazana.

5. Naj bo p zaporedje racionalnih števil, tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = x$. Tedaj je

$$a^x\cdot b^x = \lim_{n\to\infty} a^{p_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b^{p_n} = \lim_{n\to\infty}(a^{p_n}\cdot b^{p_n}) = \lim_{n\to\infty}(a\cdot b)^{p_n} = (a\cdot b)^x$$

in enakost $a^x\cdot b^x = (a\cdot b)^x$ je dokazana.

6. Ker je

$$\frac{a^x}{b^x} = a^x\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^x = \left(a\cdot\frac{1}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

je enakost $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ dokazana.

7. Ker je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{x}} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{x}$$

je enakost $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{x}$ dokazana.

8. Naj bo p zaporedje racionalnih števil, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = x$. Naj bo $a^x > 1$. Tedaj je

$$a^x > 1 \iff \lim_{n\to\infty} a^{p_n} > 1.$$

Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n}$. Tedaj je $L > 1$ natanko tedaj, ko obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsako naravno število $n \geq n_0$ velja, da je $a^{p_n} > 1$. Po trditvi o potencah z racionalnimi eksponenti (točka 8.) je to ekvivalentno temu, da je za vsak $n \geq n_0$ velja bodisi $a > 1$ in $p_n > 0$ bodisi $a < 1$ in $p_n < 0$. Recimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = x = 0$. Tedaj je $\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = a^0 = 1$—protislovje. Tako smo dokazali, da velja neenakost $a^x > 1$ natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x > 0$ bodisi $a < 1$ in $x < 0$.

9. Naj bo p zaporedje racionalnih števil, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = x$. Naj bo $a^x < 1$. Tedaj je

$$a^x < 1 \iff \lim_{n\to\infty} a^{p_n} < 1.$$

Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n}$. Tedaj je $L < 1$ natanko tedaj, ko obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsako naravno število $n \geq n_0$ velja, da je $a^{p_n} < 1$. Po trditvi o potencah z racionalnimi eksponenti (točka 9.) je to ekvivalentno temu, da je za vsak $n \geq n_0$ velja bodisi $a > 1$ in $p_n < 0$ bodisi $a < 1$ in $p_n > 0$. Recimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = x = 0$. Tedaj je $\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = a^0 = 1$—protislovje. Tako smo dokazali, da velja neenakost $a^x < 1$ natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x < 0$ bodisi $a < 1$ in $x > 0$.

10. Če je $a = 1$ ali $x = 0$, tedaj je očitno $a^x = 1$. Če je $a \neq 1$ in $x \neq 0$, sledi iz že dokazanih točk 8. in 9., da je $a^x \neq 1$. Tako je trditev dokazana.

11. Ker je

$$a^x < b^x \iff \frac{a^x}{b^x} < 1 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^x < 1,$$

velja po točki 9. neenakost $a^x < b^x$ natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $x > 0$ bodisi $a > b$ in $x < 0$.

12. Ker je

$$a^x = b^x \iff \frac{a^x}{b^x} = 1 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1,$$

velja po točki 10. enakost $a^x = b^x$ natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $x = 0$.

13. Ker je

$$a^x < a^y \iff \frac{a^x}{a^y} < 1 \iff a^{x-y} < 1,$$

velja po točki 9. neenakost $a^x < a^y$ natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $y > x$ bodisi $a < 1$ in $y < x$.

14. Ker je

$$a^x = a^y \iff \frac{a^x}{a^y} = 1 \iff a^{x-y} = 1,$$

velja po točki 10. enakost $a^x = a^y$ natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $x = y$.