Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje in matematiko

Dominik Benkovič

VEKTORJI IN MATRIKE

Maribor, 2014

CIP - Katatožni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)

BENKOVIČ, Dominik
Vektorji in matrike / Dominik Benkovič. -
Maribor: Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2014

ISBN 978-961-6657-51-8

COBISS.SI-ID 80225281

Naslov: Vektorji in matrike

Avtor: prof. dr. Dominik Benkovič

Strokovna recenzenta: prof. dr. Dušan Pagon in prof. dr. Tatjana Petek

Lektorirala: Majda Marija Lesjak, prof.

Vrsta publikacije: skripta pri predmetu Vektorji in matrike

Tipologija COBISS: 2.05 drugo učno gradivo

Math. Subj. Class. (2010): 15A03, 15A06, 15A15

Ključne besede: linearna algebra, geometrijski vektor, vektorski prostor, matrika, sistem linearnih enačb, determinanta, rang

Izdala in založila: Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru

Leto: 2014

Število izvodov: 50

Cena posameznega izvoda: 10 €

Kazalo

Kazalo slik

Predgovor

Pričujoče delo je zastavljeno kot skripta pri predmetu Vektorji in matrike na prvi bolonjski stopnji študijskega programa Matematika na Fakulteti za naravoslovje in matematiko in je nastalo na podlagi priprav na predavanja. Linearna algebra je po bolonjski prenovi na študiju matematike razdeljena med predmeta *Vektorji in matrike* in *Linearna algebra.* Prvi predmet pokrije osnove linearne algebre, vektorski in matrični račun, in je pomemben temelj za nadaljnje delo pri drugem predmetu. Samo delo tako sestavlja pet poglavij: geometrijski vektorji, vektorji v $\mathbb{R}^n$, matrike, sistemi linearnih enačb in determinanta.

Tematika linearne algebre je obravnavana v veliko knjigah in učbenikih. Posamezni avtorji imajo različne pristope k obravnavani tematiki, različen vrstni red podajanja snovi in različen nivo zahtevnosti. V nobenem delu pristop in vrstni red obravnave ne sovpada z uporabljenim pri predmetu Vektorji in matrike. Zato sem pri pripravi dela imel primarni cilj študentom zagotoviti vir, ki sledi podajanju snovi na predavanjih. Po drugi strani na ustnih zagovorih teorije premnogokrat opažam pomanjkljivo znanje in nerazumevanje osnovnih pojmov. Zato upam, da bo knjižica študentom omogočala kvaliteten samostojen študij. Za utrditev teorije je nujno potrebno predelati kakšno kvalitetno zbirko nalog, priporočam gradiva [1, 2, 3].

Pri podajanju snovi se v čim večjem možnem obsegu držim matematične korektnosti. Zato je glavnina vseh rezultatov tudi dokazanih. Nekateri rezultati so podani kot dejstva, brez dokazov, ker bodisi tematika presega nivo zahtevnosti bodisi bodo obravnavani pri predmetu Linearna algebra bodisi so njihovi dokazi tehnično zapleteni in zamudni. Pozoren bralec bo v delu zagotovo našel kakšno nedoslednost, ki izhaja iz dejstva, da je gradivo namenjeno študentom na začetku študija, kjer je smiselno kakšno strogo formalnost tudi izpustiti.

Delo ne vsebuje originalnih prispevkov ali pristopov k področju linearne algebre. Lasten je v določeni meri le izbor in sama predstavitev obravnavane snovi. Pri pripravi gradiva sem se zgledoval predvsem po učbenikih [4, 5, 6, 7] in zbirkah nalog [1, 2, 3]. Prav tako sem uporabljal zapiske predavanj profesorjev dr. Sandija Klavžarja in dr. Dušana Pagona, ki sta pred mano predavala predmet Linearna algebra, in pri katerih sem vrsto let kot asistent vodil vaje.

Na koncu bi se iskreno zahvalil recenzentoma prof. dr. Dušanu Pagonu in prof. dr. Tatjani Petek za natančen pregled dela in popravke. Zahvala gre tudi Majdi Mariji Lesjak za lektoriranje besedila in sodelavcema dr. Bojanu Hvali in dr. Samu Repolusku za nasvete pri uporabi programa GeoGebra.

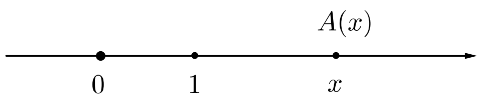
Poglavje 1

Geometrijski vektorji

Poglavje obravnava geometrijske vektorje v prostoru $\mathbb{R}^3$. Geometrijski vektor predstavimo z usmerjeno daljico, ki v prostor ni togo umeščena, ampak se lahko vzporedno premika. V prvem podpoglavju najprej na množici $\mathbb{R}^3$ definiramo seštevanje točk in množenje točk z realnimi števili. Tako pridemo do pojma vektorskega prostora in vektorjev. Vektorje identificiramo z usmerjenimi daljicami, katerih začetna točka je vezana na izhodišče koordinatnega sistema v $\mathbb{R}^3$. Z uporabo ekvivalenčne relacije na usmerjenih daljicah nazadnje vpeljemo še geometrijske vektorje. V drugem podpoglavju spoznamo osnovne pojme iz teorije vektorskih prostorov, kot so linearna kombinacija, linearna neodvisnost, baza prostora, in si ogledamo uporabo linearne kombinacije v geometriji. V nadaljnjih podpoglavjih obravnavamo lastnosti skalarnega, vektorskega in mešanega produkta vektorjev. Vsi omenjeni produkti imajo nazoren geometrijski pomen in so uporabni v analitični geometriji in fiziki. Nazadnje spoznamo še osnove analitične geometrije v $\mathbb{R}^3$, kjer je poudarek na enačbah premic in ravnin v prostoru. Prav tako nas bo zanimal medsebojni odnos objektov v prostoru: točka, premica, ravnina in njihove medsebojne oddaljenosti.

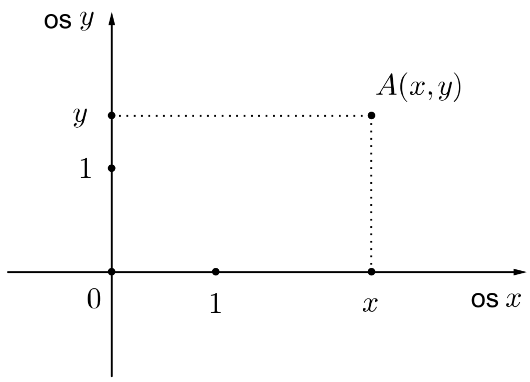
1.1 Definicija in osnovne računske operacije

Z $\mathbb{R}$ označimo množico realnih števil. Realna števila predstavimo s točkami na premici, ki se imenuje realna os. Pri tem določimo izhodišče in enotsko dolžino, glej sliko 1.1.



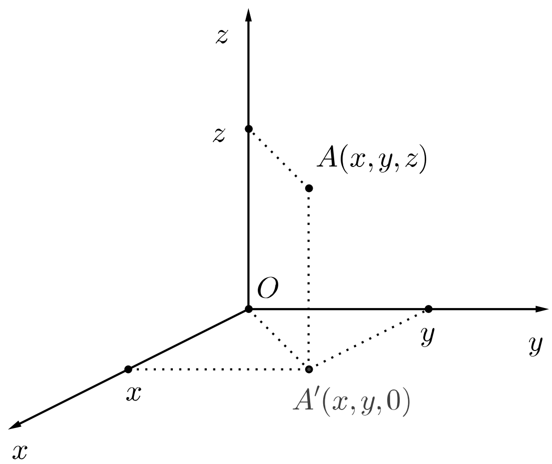
Slika 1.1: Realna os

Vsaka točka A na realni osi je potem natanko določena s koordinato $x \in \mathbb{R}$, kar označimo z $A(x)$. Naj bo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ množica vseh urejenih parov realnih števil. Množico $\mathbb{R}^2$ predstavimo s točkami v ravnini.



Slika 1.2: Ravnina $\mathbb{R}^2$

V kartezičnem koordinatnem sistemu, ki ga tvorita dve med seboj pravokotni realni osi (abscisna os x in ordinatna os y), je vsaka točka A na ravnini natanko določena s koordinatama $x, y \in \mathbb{R}$, kar označimo z $A\,(x, y)$. Nadalje, naj bo $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$ množica vseh urejenih trojic realnih števil. Geometrijsko množico $\mathbb{R}^3$ predstavimo s točkami v prostoru.



Slika 1.3: Prostor $\mathbb{R}^3$

Kartezični koordinatni sistem v prostoru določajo tri medsebojno pravokotne realne osi; zraven osi x in y imamo še aplikatno os z. Točka $A\,(x, y, z)$ v prostoru je torej določena s tremi koordinatami $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Izhodišče koordinatnega sistema v prostoru označimo z $O\,(0, 0, 0)$. Dogovorimo se, da bomo v nadaljevanju točke in njihove koordinate v prostoru označevali na način: $A\,(a_1, a_2, a_3)$, $B\,(b_1, b_2, b_3)$, $C\,(c_1, c_2, c_3)$. V določenih primerih tudi krajše (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3). Množico $\mathbb{R}^3$ opremimo z osnovnima računskima operacijama, ki se imenujeta seštevanje točk in množenje točk z realnimi števili. Dani operaciji sta definirani na naslednji način:

- seštevanje $+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$A\,(a_1,a_2,a_3)\,,B\,(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3,\ \text{potem}\ \ (A+B)\,(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \quad \text{ali}$$
$$A+B=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\,;$$

- množenje z realnimi števili (skalarji) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ A\,(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3,\ \text{potem}\ \ (\lambda A)\,(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3) \quad \text{ali}$$
$$\lambda A=\lambda\,(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)\,.$$

Vidimo, da je seštevanje točk v prostoru definirano z običajnih seštevanjem enakoležnih koordinat. Z realnim skalarjem λ točko v prostoru pomnožimo tako, da z λ pomnožimo vsako koordinato. Opomnimo, da lahko podobno kot v prostoru tudi v ravnini definiramo operaciji seštevanje in množenje z realnimi skalarji. Na premici pa se operaciji ujemata z običajnim seštevanjem in množenjem realnih števil.

Trditev 1.1. *Za seštevanje točk v $\mathbb{R}^3$ veljajo naslednje lastnosti:*
$S1$ $A+B=B+A$ *za vse* $A,B \in \mathbb{R}^3$.
$S2$ $(A+B)+C=A+(B+C)$ *za vse* $A,B,C \in \mathbb{R}^3$.
$S3$ *Obstaja* $O \in \mathbb{R}^3$*, da je* $A+O=A$ *za vsak* $A \in \mathbb{R}^3$.
$S4$ *Za vsak* $A \in \mathbb{R}^3$ *obstaja* $-A \in \mathbb{R}^3$*, da je* $A+(-A)=O$.

Opomba 1. Lastnosti, ki jim zadošča seštevanje točk v $\mathbb{R}^3$, so: $S1$ zakon o zamenjavi ali komutativnost, $S2$ zakon o združevanju ali asociativnost, $S3$ obstoj nevtralnega elementa, $S4$ obstoj nasprotnih elementov.

Opomba 2. Z $A-B$ označimo razliko točk A in B. Opomnimo, da je odštevanje točk prištevanje nasprotnega elementa; torej $A-B=A+(-B)$ oziroma

$$A-B=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)\,.$$

Dokaz trditve 1.1. Naj bosta $A\,(a_1,a_2,a_3)$ in $B\,(b_1,b_2,b_3)$ poljubni točki iz $\mathbb{R}^3$. Upoštevajoč komutativnost seštevanja v realnih številih, lahko zapišemo

$$A+B=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)=B+A$$

in komutativnost seštevanja je dokazana. Da je seštevanje točk v $\mathbb{R}^3$ asociativno, dokažemo podobno, pri tem upoštevamo asociativnost seštevanja v $\mathbb{R}$. Nevtralen element za seštevanje je $O=(0,0,0)$ (izhodišče koordinatnega sistema), ker za vsako točko A velja

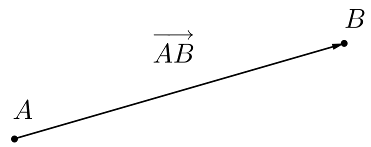
$$A+O=(a_1,a_2,a_3)+(0,0,0)=(a_1,a_2,a_3)=A.$$

Za vsak $A\,(a_1,a_2,a_3)$ označimo z $-A=(-a_1,-a_2,-a_3)$. Potem velja

$$A+(-A)=(a_1,a_2,a_3)+(-a_1,-a_2,-a_3)=(0,0,0)=O$$

in $-A$ je nasproten element od A. $\square$

Naj bosta A, B točki v $\mathbb{R}^3$ ali $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}$. *Usmerjena daljica* $\overrightarrow{AB}$ rečemo urejenemu paru točk (A, B), kjer je A začetna točka in B končna točka. Geometrijska upodobitev usmerjene daljice je prikazana na sliki 1.4.



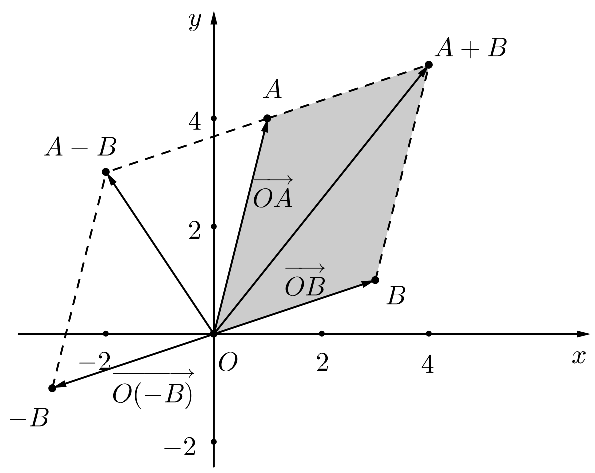
Slika 1.4: Usmerjena daljica

Usmerjene daljice so uporabne pri predstavitvi geometrijskega modela seštevanja točk. Vse zapisane lastnosti operacij v $\mathbb{R}^3$ analogno veljajo tudi v $\mathbb{R}^2$. Zaradi nazornejše predstave bomo zato v naslednjih zgledih delali s točkami v ravnini.

Zgled 1. Dani sta točki $A\,(1,4)$ in $B\,(3,1)$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
A + B &= (1,4) + (3,1) = (4,5)\,;\\
-B &= -\,(3,1) = (-3,-1)\,;\\
A - B &= (1,4) - (3,1) = (-2,3)\,.
\end{aligned}
$$

Vse dane točke so prikazane na sliki 1.5.



Slika 1.5: Seštevanje točk

Geometrijski model: Identificiramo točko A z usmerjeno daljico $\overrightarrow{OA}$ in točko B z usmerjeno daljico $\overrightarrow{OB}$. Potem je $A+B$ končna točka usmerjene daljice z začetkom v izhodišču O in predstavlja eno od diagonal paralelograma, določenega z usmerjenima daljicama $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$.

Trditev 1.2. *Za množenje točk v $\mathbb{R}^3$ z realnimi skalarji veljajo naslednje lastnosti:*
M1 $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ *za vse* $\lambda \in \mathbb{R}$ *in* $A, B \in \mathbb{R}^3$;
M2 $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ *za vse* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *in* $A \in \mathbb{R}^3$;
M3 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ *za vse* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *in* $A \in \mathbb{R}^3$;
M4 $1A = A$ *za vsak* $A \in \mathbb{R}^3$.

Dokaz. Naj bosta $A(a_1, a_2, a_3)$ in $B(b_1, b_2, b_3)$ poljubni točki in $\lambda \in \mathbb{R}$. Upoštevajoč definicijo seštevanja in množenja z realnimi skalarji v $\mathbb{R}^3$ ter distributivnost, ki povezuje operaciji seštevanja in množenja v $\mathbb{R}$, lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}\lambda(A+B) &= \lambda(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (\lambda(a_1+b_1), \lambda(a_2+b_2), \lambda(a_3+b_3)) \\ &= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \lambda a_3 + \lambda b_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) \\ &= \lambda(a_1, a_2, a_3) + \lambda(b_1, b_2, b_3) = \lambda A + \lambda B.\end{aligned}$$

Zato $M1$ velja. Podobno dokažemo še lastnost $M2$:

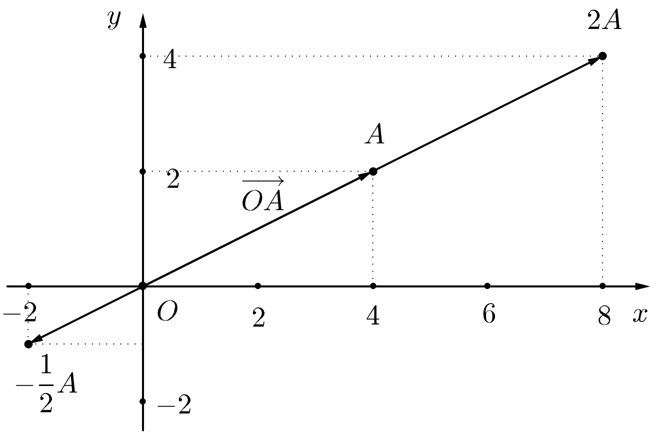
$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)A &= ((\lambda+\mu)a_1, (\lambda+\mu)a_2, (\lambda+\mu)a_3) = (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \lambda a_3 + \mu a_3) \\ &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = \lambda A + \mu A\end{aligned}$$

in $M3$, kjer upoštevamo asociativnost množenja v $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)A &= ((\lambda\mu)a_1, (\lambda\mu)a_2, (\lambda\mu)a_3) = (\lambda(\mu a_1), \lambda(\mu a_2), \lambda(\mu a_3)) \\ &= \lambda(\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = \lambda(\mu(a_1, a_2, a_3)) = \lambda(\mu A).\end{aligned}$$

Da velja $M4$, je očitno. $\square$

Zgled 2. Naj bo $A(4, 2)$. Potem je $2A = (8, 4)$ in $-\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(-A) = (-2, -1)$.



Slika 1.6: Množenje točke s skalarjem

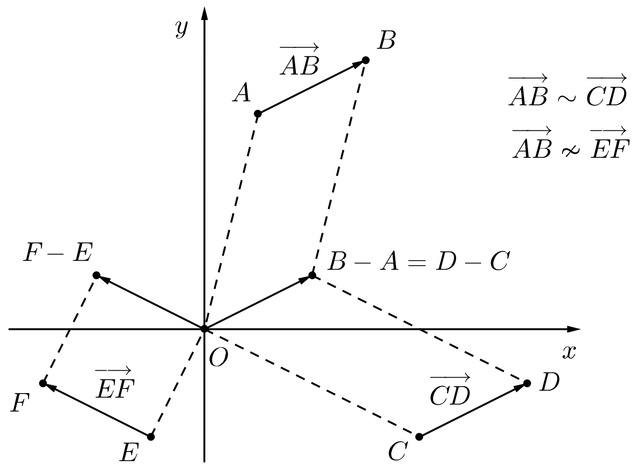
Geometrijski model: Naj bo $\lambda > 0$. Če identificiramo točko A z usmerjeno daljico $\overrightarrow{OA}$, potem je λA končna točka usmerjene daljice, ki smo jo dobili z raztegom ($\lambda \geq 1$) ali s skrčitvijo ($\lambda < 1$) usmerjene daljice $\overrightarrow{OA}$ za faktor λ. V primeru, ko je

$\lambda < 0$, uporabimo opisani postopek, kjer nadomestimo točko A z njeno nasprotno vrednostjo $-A$ in λ nadomestimo z $|\lambda|$.

Definicija. Množica V, ki je opremljena z operacijama $+ : V \times V \to V$ (seštevanje) in $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (množenje z realnimi skalarji) in zadošča lastnostim $S1$–$S4$ in $M1$–$M4$, se imenuje *realen vektorski prostor.* Elementi vektorskega prostora V so *vektorji.*

Zato je $\mathbb{R}^3$, opremljen s seštevanjem in množenjem s skalarji, zgled vektorskega prostora. Vektor v $\mathbb{R}^3$ je torej urejena trojica $A\,(a_1, a_2, a_3)$ ali (a_1, a_2, a_3) in ga geometrijsko predstavimo z usmerjeno daljico $\overrightarrow{OA}$ z začetkom v O in koncem v A. Ker bi želeli vektor vzporedno premikati po prostoru, bomo to formalno definirali.

Definicija. Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ sta ekvivalentni, oznaka $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, če je $B - A = D - C$.



Slika 1.7: Ekvivalentnost usmerjenih daljic

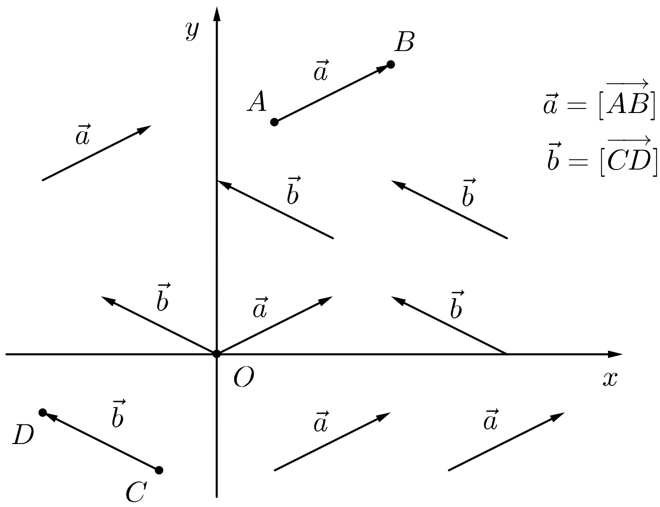
Geometrijsko sta usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ ekvivalentni, če lahko $\overrightarrow{CD}$ dobimo iz $\overrightarrow{AB}$ z vzporednim premikom. Namreč, ker je $B - A = (B - A) - O$, je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{O(B-A)}$. Podobno velja tudi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{O(D-C)}$. Zato je enakost $B - A = D - C$ izpolnjena natanko tedaj, ko usmerjeni daljici $\overrightarrow{O(B-A)}$ in $\overrightarrow{O(D-C)}$ sovpadata. To pomeni, da lahko $\overrightarrow{CD}$ dobimo iz $\overrightarrow{AB}$ z vzporednim premikom. Relacija $\sim$ ima naslednje lastnosti:

Trditev 1.3. *Relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija; to pomeni, da za poljubne točke A, B, C, D, E, F velja:*
(i) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ *(refleksivnost),*
(ii) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ *(simetričnost),*
(iii) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ *(tranzitivnost).*

Dokaz. Refleksivnost in simetričnost relacije $\sim$ sledita neposredno iz definicije. Preverimo samo tranzitivnost. Naj velja $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ in $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Potem je $B - A = D - C$ in $F - E = D - C$. Zato je tudi $B - A = F - E$ in $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. $\square$

Označimo z $[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}\}$ množico vseh usmerjenih daljic, ki so ekvivalentne usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$. Ta množica se imenuje *ekvivalenčni razred* s predstavnikom $\overrightarrow{AB}$. Ekvivalenčni razred $[\overrightarrow{AB}]$ vsebuje neskončno usmerjenih daljic; vsaka točka v prostoru je začetna točka neke usmerjene daljice, ki je ekvivalentna usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$. Dva ekvivalenčna razreda usmerjenih daljic sta enaka $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$ natanko tedaj, ko sta njuna predstavnika ekvivalentna $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, sicer pa nimata skupnih elementov.

Definicija. Ekvivalenčni razred $[\overrightarrow{AB}]$ je *geometrijski vektor.*

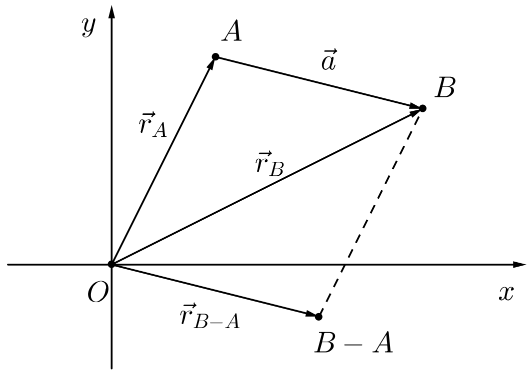


Slika 1.8: Geometrijska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$

Geometrijski vektorji so torej ekvivalenčni razredi usmerjenih daljic. Geometrijske vektorje označujemo z malimi tiskanimi črkami s puščico: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Na sliki 1.8 sta z nekaterimi predstavniki prikazana geometrijska vektorja $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ in $\vec{b} = [\overrightarrow{CD}]$. Pod pojmom geometrijskega vektorja si tako predstavljamo usmerjeno daljico, ki se lahko po prostoru prosto vzporedno premika.

Če je $\overrightarrow{AB}$ poljubna usmerjena daljica, za predstavnika razreda $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ običajno izberemo usmerjeno daljico $\overrightarrow{O(B-A)}$ z začetno točko O, ki je element $\mathbb{R}^3$. Če je $A \in \mathbb{R}^3, A\,(a_1, a_2, a_3)$, potem vektor $\overrightarrow{OA}$ imenujemo *krajevni vektor* točke A in pripadajoči geometrijski vektor označimo z

$$\vec{r}_A = [\overrightarrow{OA}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$



Slika 1.9: Krajevni vektorji

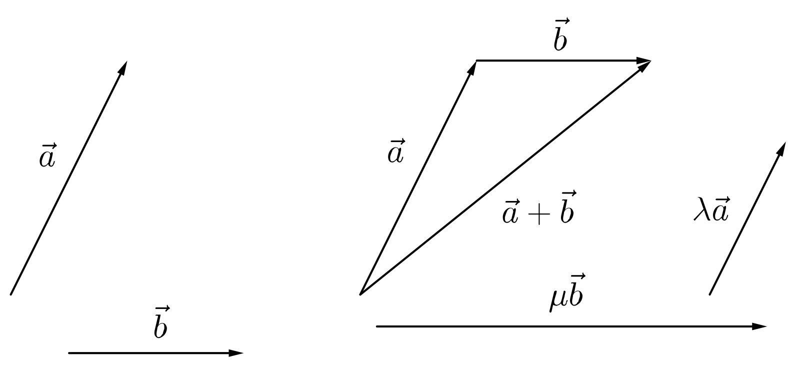
Krajevni vektorji točk A, B in $B-A$ so prikazani na sliki 1.9. Pri tem tudi vidimo, da sta usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{O(B-A)}$ ekvivalentni.

Geometrijske vektorje bomo zapisovali v obliki stolpca. Elementi, zapisani v tem stolpcu, se imenujejo *skalarne komponente*. Vsak geometrijski vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ lahko tako izrazimo s krajevnim geometrijskim vektorjem $\vec{a} = \vec{r}_{B-A}$. Komponente geometrijskega vektorja $\vec{a}$ so dejansko koordinate končne točke, ko je njegova začetna točka izhodišče O.

Z geometrijskimi vektorji algebraično računamo tako, kot smo s točkami v $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} ; \quad \lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix} .$$

Geometrijsko jih lahko seštevamo tako, da z vzporednim premikom dosežemo sovpadanje končne točke $\vec{a}$ z začetno točko $\vec{b}$. Geometrijski vektor, katerega začetna točka je enaka začetni točki $\vec{a}$ in končna točka enaka končni točki $\vec{b}$, predstavlja vsoto $\vec{a}+\vec{b}$.



Slika 1.10: Seštevanje geometrijskih vektorjev

Zaključimo to poglavje z nekaterimi opombami in dogovorom.

1. Iz slike 1.9 je razvidno, da je $\vec{a} = \vec{r}_{B-A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

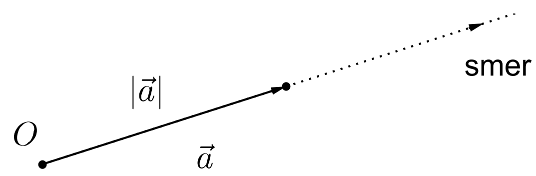
2. Neformalno omenimo, da ima vsak geometrijski vektor smer in dolžino, s katerima je natančno določen; glej sliko 1.11. Dolžino vektorja $\vec{a}$ označimo z $|\vec{a}|$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ imata isto smer takrat, ko ob vzporednem premiku v izhodiščno točko njuni končni točki ležita na istem poltraku iz izhodišča. Na primer, geometrijski vektor $\lambda\vec{a}$ ima dolžino $|\lambda|\,|\vec{a}|$ in smer enako smeri $\vec{a}$, če je $\lambda > 0$, in smer enako kot $-\vec{a}$, če je $\lambda < 0$. Pri tem omenimo še, da smer ničelnega vektorja $\vec{0} = [\overrightarrow{AA}]$ ni določena.

3. Naj bosta
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
geometrijska vektorja. Enakost $\vec{a} = \vec{b}$ lahko opišemo na več načinov:

   (i) $\vec{b}$ dobimo iz $\vec{a}$ z vzporednim premikom;

   (ii) vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ imata isto smer in dolžino;

   (iii) komponente vektorjev sovpadajo, to pomeni $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.



Slika 1.11: Dolžina in smer vektorja $\vec{a}$

Dogovor. Zaradi poenostavitve zapisa bomo v nadaljnjih poglavjih geometrijske vektorje krajše označevali z njihovimi predstavniki, torej usmerjenimi daljicami $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EF}$. Izpuščali bomo oznako za ekvivalenčni razred $[\quad]$. Prav tako bomo praviloma pri izrazu geometrijski vektor $\vec{a}$ izpustili pridevnik geometrijski, torej bo samo vektor $\vec{a}$.

Pomni. Geometrijsko je vektor iz $\mathbb{R}^3$ usmerjena daljica $\overrightarrow{OA}$ z začetno točko O in končno točko A. Geometrijski vektor predstavlja ekvivalenčni razred usmerjenih daljic s predstavnikom $\overrightarrow{AB}$; usmerjena daljica $\overrightarrow{AB}$ se pri tem lahko prosto vzporedno premika po prostoru.

1.2 Linearna kombinacija, neodvisnost in baza

Vektorji v $\mathbb{R}^3$ so osnovni zgled splošne strukture, ki se imenuje vektorski prostor. Zato bomo v tem podpoglavju spoznali nekatere osnovne pojme iz vektorskih prostorov, kot so linearna kombinacija vektorjev, linearna neodvisnost in baza vektorskega prostora. Začnimo z motivacijo:

Naj bo $\vec{a}$ vektor iz $\mathbb{R}^3$. Vektor $\vec{a}$ predstavimo kot urejeno trojico realnih števil, zapisano v obliki stolpca. Upoštevajoč definiciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev z realnimi skalarji, lahko zapišemo

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

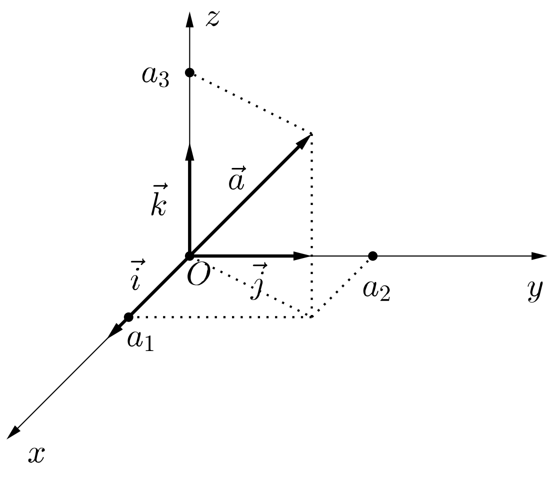
kjer so $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Označimo vektorje

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ki geometrijsko predstavljajo krajevne vektorje točk $A\,(1,0,0)\,, B\,(0,1,0)\,, C\,(0,0,1)$ in določajo koordinatne osi kartezičnega koordinatnega sistema v $\mathbb{R}^3$. Glej sliko 1.12! Vidimo, da se vsak vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ zapiše kot tako imenovana *linearna kombinacija* vektorjev $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ v obliki

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Množica vektorjev $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se imenuje *standardna baza* vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.



Slika 1.12: Bazni vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Vsak vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ se na enoličen način zapiše kot linearna kombinacija vektorjev $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Denimo, da velja

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Potem je

$$(a_1 - b_1)\,\vec{i} + (a_2 - b_2)\,\vec{j} + (a_3 - b_3)\,\vec{k} = \vec{0}$$

oziroma

$$(a_1 - b_1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (a_2 - b_2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (a_2 - b_2)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 - b_1\\a_2 - b_2\\a_2 - b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Zato je $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$ in zapis v obliki linearne kombinacije je enoličen. Vidimo tudi, da imajo vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lastnost, da iz $\lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k} = \vec{0}$ sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Zato pravimo, da so vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *linearno neodvisni*. Vsak vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ se enolično zapiše kot linearna kombinacija treh vektorjev $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, zato pravimo, da je *razsežnost* prostora geometrijskih vektorjev enaka 3.

V nadaljevanju naj bodo $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorji v $\mathbb{R}^3$ in $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ realni skalarji.

Definicija. *Linearna kombinacija* vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ je vektor

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n, \tag{1.1}$$

kjer so $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Skalarji λ_i se imenujejo *koeficienti* linearne kombinacije. Linearna kombinacija (1.1) je *trivialna*, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Če je vsaj en $\lambda_i \neq 0$, je linearna kombinacija vektorjev netrivialna.

Zgled 1. Naj bodo

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\vec{a} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}9\\6\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\\3\end{bmatrix}.$$

Označimo z V množico vseh linearnih kombinacij vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$:

$$V = \{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Množica V se imenuje *linearna lupina* (*ogrinjača*) vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ in jo krajše označimo z $\mathcal{L}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$. Vidimo, da je $\vec{0} \in V$ in tudi vsak $\vec{a}_i \in V$. Na množici

V je naravno definirano seštevanje $+ : V \times V \to V$ in množenje z realnimi skalarji $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ na način

$$(\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n) + (\mu_1 \vec{a}_1 + \cdots + \mu_n \vec{a}_n) = (\lambda_1 + \mu_1) \vec{a}_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) \vec{a}_n,$$
$$\lambda (\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n) = (\lambda\lambda_1) \vec{a}_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n) \vec{a}_n.$$

Bralec lahko preveri, da množica V, opremljena s seštevanjem in množenjem z realnimi skalarji, zadošča lastnostim $S1$–$S4$ in $M1$–$M4$ (glej trditvi 1.1 in 1.2). Zato je V vektorski prostor, bolj natančno rečemo, da je V vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^3$, ker je $V \subseteq \mathbb{R}^3$.

Definicija. Vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ so *linearno neodvisni*, če je edino trivialna linearna kombinacija teh vektorjev enaka $\vec{0}$; to pomeni

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{1.2}$$

Vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ so *linearno odvisni*, če niso linearno neodvisni. Če imamo množico $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ linearno neodvisnih vektorjev, pravimo, da je to *linearno neodvisna množica.*

Definicija. Množica linearno neodvisnih vektorjev $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ je *baza* vektorskega prostora $V = \mathcal{L}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ in *razsežnost* tega prostora je enaka n.

Opomba 1. Kdaj so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ linearno odvisni? Ko obstaja netrivialna linearna kombinacija, ki je enaka $\vec{0}$; to pomeni

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{in obstaja} \quad \lambda_i \neq 0.$$

Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\lambda_1 \neq 0$. Najprej zapišemo

$$\lambda_1 \vec{a}_1 = -\lambda_2 \vec{a}_2 - \cdots - \lambda_n \vec{a}_n.$$

Ker je $\lambda_1 \neq 0$, vidimo, da lahko vektor $\vec{a}_1$ izrazimo v obliki linearne kombinacije ostalih vektorjev

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n = \mu_2 \vec{a}_2 + \cdots + \mu_n \vec{a}_n.$$

To hkrati pomeni, da so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ linearno neodvisni, če se ne izražajo med seboj.

Opomba 2. Če so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ linearno neodvisni in je $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n$, potem so koeficienti λ_i enolično določeni. Predpostavimo, da velja

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \cdots + \mu_n \vec{a}_n$$

za neke $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$. Potem je

$$(\lambda_1 - \mu_1) \vec{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{a}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) \vec{a}_n = \vec{0}$$

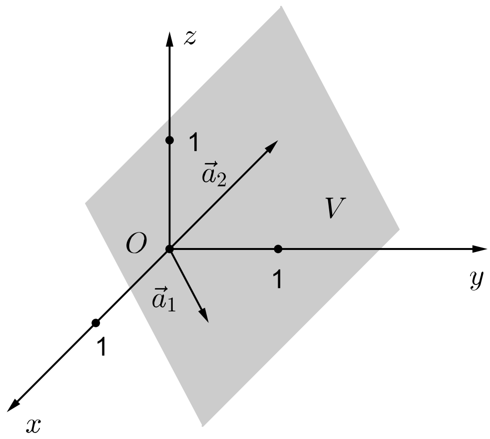
in iz linearne neodvisnosti (1.2) sledi želeni rezultat $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, ..., \lambda_n = \mu_n$.

Zgled 2.

1. V uvodni motivaciji smo videli, da so vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno neodvisni in tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3 = \{\lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k} | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$.

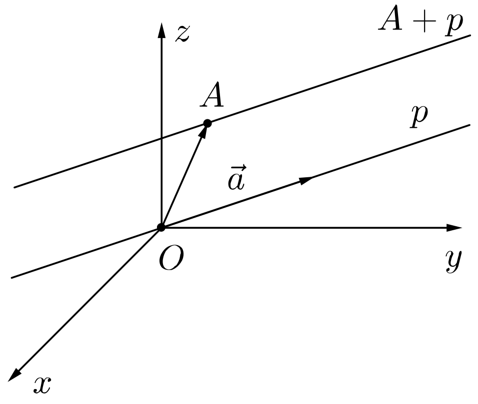
2. Vektorji
$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
so linearno odvisni, saj je
$$2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}.$$
Lahko zapišemo tudi $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

3. Preverimo, da sta vektorja $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ iz prejšnje točke linearno neodvisna. Zapišemo
$$\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$
Očitno je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ in edino trivialna linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ je enaka $\vec{0}$. Vektorski podprostor $V = \{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ geometrijsko predstavlja ravnino, ki poteka skozi izhodišče in vsebuje vektorja $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Ker je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ baza podprostora V, je to dvorazsežen vektorski podprostor.



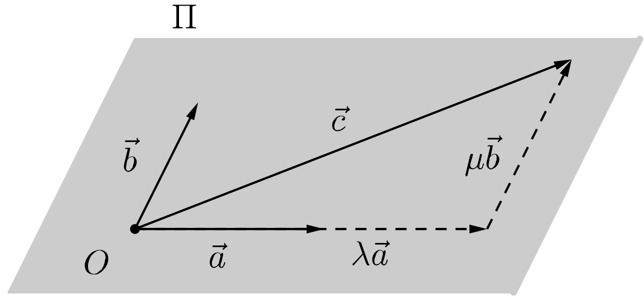
Slika 1.13: Ravnina, določena z O in $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

Vprašanje 1. Kdaj je $\{\vec{a}\}$ linearno neodvisna množica? Predpostavimo $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$. Če je $\vec{a} = \vec{0}$, potem je $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ in $\vec{0}$ je linearno odvisen vektor. Če je $\vec{a} \neq \vec{0}$, potem iz $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ sledi $\lambda = 0$ in $\vec{a}$ je linearno neodvisen vektor. Vektorski podprostor $p = \{\lambda\vec{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ predstavlja premico, ki poteka skozi izhodišče in vsebuje $\vec{a}$. Vektor $\vec{a}$ v tem primeru imenujemo tudi smerni vektor premice p.



Slika 1.14: Premici p in $A + p$

Baza tega prostora je $\{\vec{a}\}$ in razsežnost je 1. Enorazsežni podprostori v $\mathbb{R}^3$ so torej premice, ki potekajo skozi izhodišče. Posebej omenimo, da premice, ki ne potekajo skozi izhodišče, niso vektorski podprostori. Premica $A + p = \{\vec{r}_A + \lambda\vec{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$, ki poteka skozi točko A v smeri vektorja $\vec{a}$, je tako imenovani afini podprostor (glej sliko 1.14).



Slika 1.15: Ravnina

Vprašanje 2. Kdaj sta vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ linearno odvisna? Predpostavimo $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$, kjer je $\mu \neq 0$. Potem lahko vektor $\vec{b}$ izrazimo z $\vec{a}$:

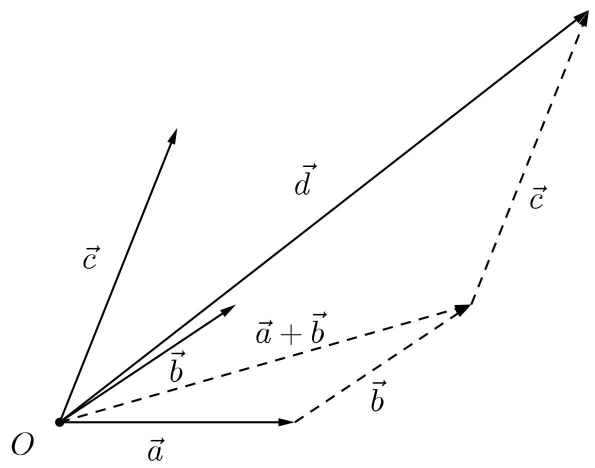
$$\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{a} = t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno odvisna, ko sta *kolinearna*, ležita na isti premici skozi O. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna, če nista kolinearna. Vektorski podprostor $\Pi = \{\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ geometrijsko predstavlja ravnino, ki poteka skozi izhodišče in vsebuje vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ (glej sliko 1.15). Vsak vektor $\vec{c}$, ki leži v ravnini Π, se izraža kot linearna kombinacija $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Baza podprostora Π je množica $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ in razsežnost Π je 2. Vidimo, da so dvorazsežni podprostori v $\mathbb{R}^3$ ravnine, ki vsebujejo izhodišče.

Vprašanje 3. Kdaj so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni? Naj bo $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, kjer je $\gamma \neq 0$. Potem lahko izrazimo vektor $\vec{c}$:

$$\vec{c} = -\frac{\lambda}{\gamma}\vec{a} - \frac{\mu}{\gamma}\vec{b} = t\vec{a} + s\vec{b}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno odvisni, če so *komplanarni*, ležijo na isti ravnini. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni, če ne ležijo na isti ravnini, ki poteka skozi O, in tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3 = \{\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} | \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Vsak vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ se v tem primeru enolično izraža kot linearna kombinacija $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Zato je množica $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Opomnimo, da baza vektorskega prostora ni enolično določena. Kartezični koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ določa standardno bazo, urejeno trojico $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Slika 1.16: Baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Zgled 3. *Uporaba linearne kombinacije v geometriji.* Dane so točke $A\,(a_1, a_2, a_3)$, $B\,(b_1, b_2, b_3)$ in $C\,(c_1, c_2, c_3)$ v $\mathbb{R}^3$, ki določajo trikotnik ΔABC. Težiščnice trikotnika ΔABC se sekajo v razmerju $2 : 1$. Težišče ima koordinate

$$T\left(\frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1), \frac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2), \frac{1}{3}(a_3 + b_3 + c_3)\right)$$

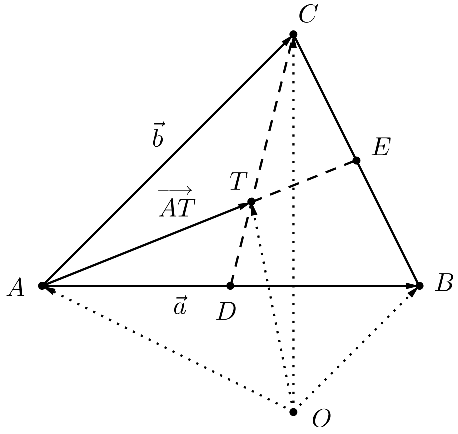
oziroma krajevni vektor težišča je $\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$.

Označimo z $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, ki sta linearno neodvisna vektorja. Naj bosta točki D in E razpolovišči stranic AB in BC. Z uporabo slike 1.17 izrazimo vektor $\overrightarrow{AT}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na dva načina

$$\overrightarrow{AT} = k\overrightarrow{AE} = k\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = k\left(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})\right) = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b}$$

in

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + l\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a} + l\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}(1 - l)\,\vec{a} + l\vec{b}.$$



Slika 1.17: Težišče trikotnika ΔABC

Zato je

$$\frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b} = \frac{1}{2}(1-l)\,\vec{a} + l\vec{b}.$$

Če dano enakost pomnožimo z 2 in preuredimo, sledi

$$(1-k-l)\,\vec{a} + (2l-k)\,\vec{b} = \vec{0}.$$

Ker sta $\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna vektorja, je

$$1-k-l=0 \quad \text{in} \quad 2l-k=0.$$

Rešitev danih enačb je $k = 2/3$ in $l = 1/3$. To pomeni $\overrightarrow{AT} = 2/3\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{TE} = 1/3\overrightarrow{AE}$ in $AT : TE = 2 : 1$. Na koncu izrazimo še krajevni vektor težišča. Upoštevajmo, da je $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ in $\vec{b} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$, in dobimo želeni rezultat

$$\begin{aligned}\vec{r}_T &= \vec{r}_A + \overrightarrow{AT} = \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{r}_A + \frac{1}{3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \frac{1}{3}(\vec{r}_C - \vec{r}_A)\\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right).\end{aligned}$$

1.3 Skalarni produkt

V tem podpoglavju definiramo skalarni produkt geometrijskih vektorjev in obravnavamo njegove lastnosti ter uporabo. Začnimo z definicijo:

Definicija. Naj bosta $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ in $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ vektorja iz $\mathbb{R}^3$. Tedaj je njun *skalarni produkt* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ definiran z

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Iz definicije sledi, da je skalarni produkt vektorjev preslikava $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ki danima vektorjema priredi realno število. Osnovne lastnosti skalarnega produkta so opisane v naslednji trditvi. Omenimo, da se podobne vrste preslikav v linearni algebri imenujejo *forme*.

Trditev 1.4. *Za skalarni produkt velja:*

(i) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ *za vsak* $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ *in* $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ *natanko tedaj, ko je* $\vec{a} = \vec{0}$*;*

(ii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ *za vse* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$*;*

(iii) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *za vse* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *za vse* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Dokaz. Uporabimo običajni zapis vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ po komponentah. Dokažimo *(i)*. Ker je

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

velja $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ oziroma $\vec{a} = \vec{0}$. Preostale točke preverimo neposredno z računom.

(ii)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{bmatrix} \\ &= a_1 (b_1 + c_1) + a_2 (b_2 + c_2) + a_3 (b_3 + c_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

(iii)

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 + \lambda a_3 b_3 = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(iv)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

□

Opomba 1. Skalarni produkt je simetričen *(iv)*, zato veljata tudi

*(ii)** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$;

*(iii)** $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ za vse $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

To pomeni, da je skalarni produkt aditiven po obeh komponentah (lastnost *(ii)* in *(ii)**) in homogen po obeh komponentah (lastnost *(iii)* in *(iii)**).

Opomba 2. Za bazne vektorje $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ velja

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \text{in} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0. \tag{1.3}$$

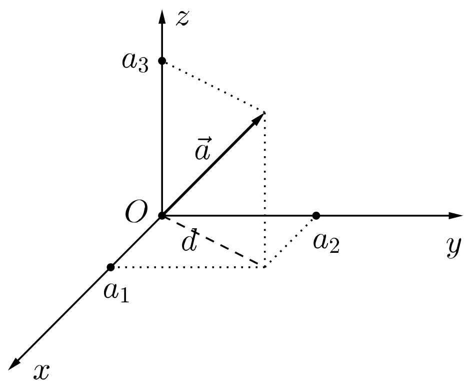
Vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ imajo lepo geometrijsko lastnost; so med seboj paroma pravokotni vektorji in njihova dolžina je enaka 1. Videli bomo, da sta omenjeni lastnosti dejansko opisani z enakostmi (1.3). Skalarni produkt v praksi uporabljamo za računanje dolžin vektorjev in razdalj med točkami v $\mathbb{R}^3$ ter računanje projekcij in kotov.

Norma vektorja

Naj bo $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ vektor iz $\mathbb{R}^3$. *Norma* ali *dolžina* vektorja $\vec{a}$ je definirana s predpisom

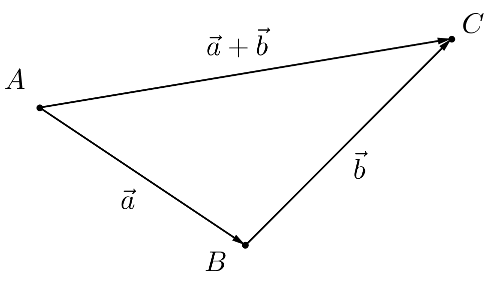
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{1.4}$$

Dana definicija je utemeljena s Pitagorovim izrekom. Zaradi pravokotnosti, glej sliko 1.18, sledi $|\vec{a}|^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.



Slika 1.18: Norma vektorja

Trditev 1.5. *Norma* $|\ |: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *ima naslednje lastnosti:*
(*i*) $|\vec{a}| \geq 0$ *za vsak* $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$*;*
(*ii*) $|\vec{a}| = 0$ *natanko tedaj, ko je* $\vec{a} = \vec{0}$*;*
(*iii*) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$ *za vse* $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
(*iv*) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ *za vse* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$*.*



Slika 1.19: Trikotniška neenakost

Norma $|\ |$ je *pozitivno definitna*, zadošča lastnostima (*i*) in (*ii*). Dani lastnosti sledita neposredno iz definicije (1.4). Norma je absolutno homogena, ima lastnost (*iii*), ki jo preverimo neposredno z računom $|\lambda\vec{a}| = \sqrt{(\lambda\vec{a}) \cdot (\lambda\vec{a})} = \sqrt{\lambda^2(\vec{a} \cdot \vec{a})} = |\lambda|\,|\vec{a}|$. Lastnost (*iv*) se imenuje trikotniška neenakost in jo ponazarja slika 1.19. Norma vsote vektorjev $|\vec{a} + \vec{b}|$ ne presega vsote norm $|\vec{a}|$ in $|\vec{b}|$. Formalni dokaz trikotniške neenakosti norme bomo podali v nadaljevanju po posledici 1.8.

Naj bosta $A\,(a_1, a_2, a_3)\,, B\,(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Tedaj je njuna *razdalja* določena z

$$d\,(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \qquad (1.5)$$

Pri tem $\vec{r}_A$ in $\vec{r}_B$ označujeta krajevna vektorja točk A in B.

Trditev 1.6. *Razdalja* $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *ima naslednje lastnosti:*
(*i*) $d\,(A, B) \geq 0$ *za vse* $A, B \in \mathbb{R}^3$*;*
(*ii*) $d\,(A, B) = 0$ *natanko tedaj, ko je* $A = B$*;*
(*iii*) $d(A, B) = d\,(B, A)$ *za vse* $A, B \in \mathbb{R}^3$*;*
(*iv*) $d\,(A, B) \leq d\,(A, C) + d\,(C, B)$ *za vse* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$*.*

Razdalja d je pozitivno definitna (lastnosti (*i*) in (*ii*)), simetrična (lastnost (*iii*)) in zadošča trikotniški neenakosti (lastnost (*iv*)). Ker prve tri lastnosti sledijo neposredno iz definicije (1.5), preverimo samo trikotniško neenakost. Pri tem uporabimo trikotniško neenakost, ki ji zadošča norma:

$$\begin{aligned} d\,(A, B) &= |\vec{r}_A - \vec{r}_B| = |(\vec{r}_A - \vec{r}_C) + (\vec{r}_C - \vec{r}_B)| \\ &\leq |\vec{r}_A - \vec{r}_C| + |\vec{r}_C - \vec{r}_B| = d\,(A, C) + d\,(C, B)\,. \end{aligned}$$

Opomba 3. Norma, ki smo jo definirali v (1.4), je tako imenovana *evklidska* norma. To je običajna vektorska norma. Lahko definiramo tudi neevklidske norme, preslikave $|\ \ | : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo lastnostim iz trditve 1.5. Bralec lahko premisli, da sta

$$|\vec{a}|_1 = |a_1| + |a_2| + |a_3| \quad \text{in} \quad |\vec{a}|_\infty = \max\{|a_1|\,, |a_2|\,, |a_3|\}$$

primera norm na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Podobno je z (1.5) definirana *evklidska* razdalja. *Metrika* ali razdalja je v splošnem vsaka preslikava d, ki zadošča lastnostim iz trditve 1.6. Poznamo tudi neevklidske razdalje, na primer omenimo dve, ki izhajata iz norm $|\ \ |_1$ in $|\ \ |_\infty$:

$$\begin{aligned} d_1\,(A, B) &= |\vec{r}_A - \vec{r}_B|_1 = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + |b_3 - a_3|\,, \\ d_\infty\,(A, B) &= |\vec{r}_A - \vec{r}_B|_\infty = \max\{|b_1 - a_1|\,, |b_2 - a_2|\,, |b_3 - a_3|\}. \end{aligned}$$

Projekcija in pravokotnost

Skalarni produkt uporabljamo tudi za računanje projekcij vektorjev, ugotavljanje pravokotnosti in računanje kotov. Temeljni geometrijski pomen skalarnega produkta je podan v naslednjem izreku:

Izrek 1.7. *Naj bosta* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ *geometrijska vektorja, potem velja*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi,$$

kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ *kot med vektorjema* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$*.*

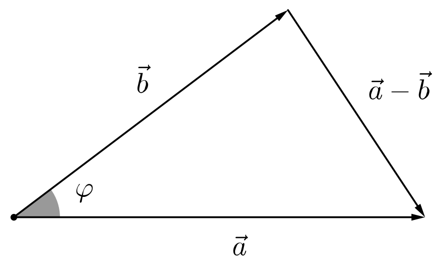
Dokaz. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a}-\vec{b}$ določajo trikotnik, glej sliko 1.20. S $\varphi = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ označimo kot, določen z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Po kosinusnem izreku velja

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2. \end{aligned}$$

S primerjavo danih enakosti sledi želeni rezultat $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$. □

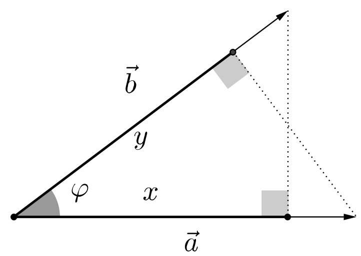


Slika 1.20: Trikotnik, določen z $\vec{a}$ in $\vec{b}$

Opomba 4. Naj bo x predznačena dolžina projekcije vektorja $\vec{b}$ na neničelni vektor $\vec{a}$. Predznačenost dolžine pomeni, da je $x \geq 0$, ko je $\varphi \in [0, \pi/2]$, in $x \leq 0$ v primeru $\varphi \in [\pi/2, \pi]$. Ker je $x = |\vec{b}|\cos\varphi$, vidimo, da je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak produktu dolžine vektorja $\vec{a}$ in predznačene dolžine projekcije vektorja $\vec{b}$ na $\vec{a}$, to pomeni

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,x$$

Podobno, če označimo z y predznačeno dolžino projekcije vektorja $\vec{a}$ na $\vec{b}$, velja $y = |\vec{a}|\cos\varphi$ in $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|y$.



Slika 1.21: Projekciji x in y

Opomba 5. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ neničelna vektorja in $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Potem velja

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}. \tag{1.6}$$

Posledica 1.8 (Neenakost CSB; Cauchy-Schwarz-Bunjakovski)**.** *Za vse vektorje* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *velja*

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|.$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ *kolinearna.*

Dokaz. Posledica sledi iz izreka 1.7, kjer upoštevamo, da je $|\cos\varphi| \leq 1$. Enakost $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ je očitno izpolnjena v primeru, ko je $\vec{a} = \vec{0}$ ali $\vec{b} = \vec{0}$ ali $\cos\varphi = \pm 1$. Natanko tedaj sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna; $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

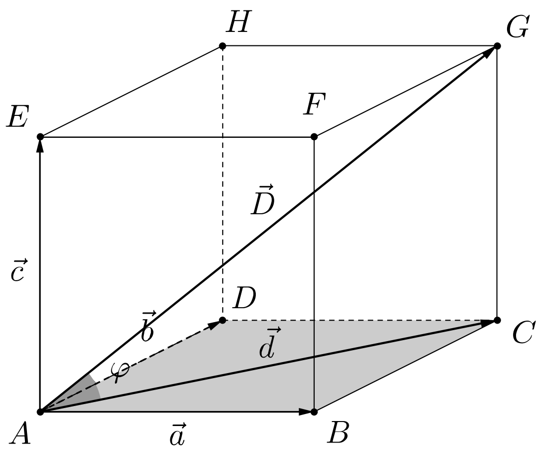
Dokaz trditve 1.5, točka (iv)**.** Dokažimo trikotniško neenakost za vektorsko normo: za poljubna vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ velja $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Če upoštevamo neenakost CSB, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2. \end{aligned}$$

Zato lahko zaključimo $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. $\square$

Pravimo, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ *pravokotna* ali *ortogonalna*, če je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Če je $\vec{a}$ ali $\vec{b}$ enak $\vec{0}$, je seveda $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Zato je vektor $\vec{0}$ pravokoten na vsak vektor. Če sta $\vec{a}$, $\vec{b}$ neničelna vektorja, je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi = 0$ natanko tedaj, ko je $\cos\varphi = 0$ oz. $\varphi = \pi/2$.

Zgled 1. Določimo, kolikšen kot tvori telesna diagonala kocke z osnovno ploskvijo.



Slika 1.22: Kocka

Kocka $ABCDEFGH$, ki je prikazana na sliki 1.22, nam določa bazne vektorje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Dani vektorji so med seboj paroma pravokotni in imajo enako dolžino; velja

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a \quad \text{in} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0.$$

Naj bo $\vec{D} = \overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ telesna diagonala kocke in $\vec{d} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ diagonala osnovne ploskve $ABCD$. Kot, ki ga tvori telesna diagonala kocke z osnovno ploskvijo, je enak kotu med vektorjema $\vec{D}$ in $\vec{d}$; torej $\varphi = \measuredangle(\vec{D}, \vec{d})$. Ker je

$$\begin{aligned}
|\vec{D}|^2 &= \vec{D} \cdot \vec{D} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 3a^2, \\
|\vec{d}|^2 &= \vec{d} \cdot \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 2a^2, \\
\vec{D} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2a^2,
\end{aligned}$$

iz (1.6) sledi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{D} \cdot \vec{d}}{|\vec{D}||\vec{d}|} = \frac{2a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Zato je $\varphi = \arccos(\sqrt{6}/3)$, kar ima, merjeno v stopinjah, približno vrednost $35.26°$.

Problem 1. Pravimo, da je $\vec{e}$ *enotski vektor*, če je $|\vec{e}| = 1$. Določi enotski vektor $\vec{e}$, ki kaže v smeri neničelnega vektorja $\vec{a}$.

Ker je vektor $\vec{e}$ kolinearen in enako usmerjen z $\vec{a}$, je oblike $\vec{e} = \lambda\vec{a}$, kjer je $\lambda > 0$. Njegova dolžina je enaka $|\vec{e}| = \lambda\,|\vec{a}|$. Če želimo, da je $\vec{e}$ enotski vektor, mora biti $\lambda = 1/\,|\vec{a}|$. Zato je iskani vektor

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

Na primer, naj bo

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

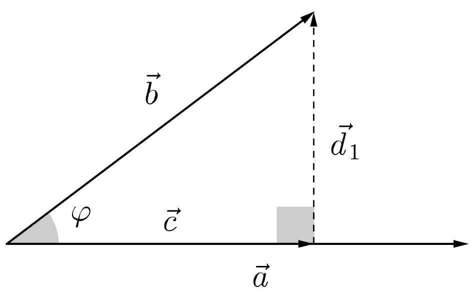
Potem je $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$. Zato je enotski vektor, ki kaže v smeri vektorja $\vec{a}$, enak

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Opisanemu postopku rečemo *normiranje*.

Problem 2. Naj bosta $\vec{a}$, $\vec{b}$ nekolinearna vektorja. Določi vektor $\vec{c}$, ki je pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

Iz slike 1.23 vidimo, da je predznačena dolžina projekcije vektorja $\vec{b}$ na $\vec{a}$ enaka $x = |\vec{b}|\cos\varphi$. Če to predznačeno dolžino x pomnožimo z enotskim vektorjem $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, dobimo iskano projekcijo $\vec{c} = x\vec{e}$.



Slika 1.23: Pravokotna projekcija $\vec{b}$ na $\vec{a}$

Projekcijo vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ lahko izrazimo tudi s skalarnim produktom

$$\vec{c} = x\vec{e} = \frac{|\vec{b}|\cos\varphi}{|\vec{a}|}\,\vec{a} = \frac{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a}.$$

Problem 3. V ravnini, določeni z $\vec{a}$ in $\vec{b}$, poišči nek vektor $\vec{d}$, ki je pravokoten na $\vec{a}$.

Iz slike 1.23 je razvidno, da je $\vec{d}_1 = \vec{b} - \vec{c}$, kjer je $\vec{c}$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na $\vec{a}$, primer takšnega vektorja. Torej

$$\vec{d}_1 = \vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.$$

Nalogo lahko rešimo tudi neposredno, brez uporabe projekcij. Ker $\vec{d}$ leži v ravnini, določeni z $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je oblike $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Ker je $\vec{d}$ pravokoten na vektor $\vec{a}$, velja

$$0 = \vec{a}\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda\,|\vec{a}|^2 + \mu(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Da bo dana enakost izpolnjena, izberemo na primer $\lambda = \vec{a}\cdot\vec{b}$ in $\mu = -\,|\vec{a}|^2$. Tako dobimo vektor

$$\vec{d}_2 = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\,\vec{b}.$$

Seveda sta vektorja $\vec{d}_1$ in $\vec{d}_2$ kolinearna, velja $\vec{d}_2 = -\,|\vec{a}|^2\,\vec{d}_1$.

V naslednjem podpoglavju bomo spoznali vektorski produkt geometrijskih vektorjev. Iskani vektor $\vec{d}$ lahko določimo tudi z uporabo vektorskega produkta. Glej zgled 3 v naslednjem podpoglavju.

1.4 Vektorski produkt

V tem podpoglavju bomo vpeljali vektorski produkt, ki je pomemben pri analitični geometriji in fiziki. Za razliko od skalarnega produkta, ki ga lahko definiramo tudi v ravnini, je vektorski produkt definiran za vektorje v $\mathbb{R}^3$. Vektorski produkt bomo definirali z njegovimi lastnostmi in si nato ogledali še njegov geometrijski pomen. Naj bo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ standardna baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Začnimo z definicijo:

Definicija. *Vektorski produkt* je operacija $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki vsakemu paru vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ priredi vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ in zadošča lastnostim:
(*i*) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ za vse $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$;
(*ii*) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$;
(*iii*) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ za vse $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(*iv*) za vektorje $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ velja

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \text{in} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Ker je vektorski produkt po definiciji *antikomutativen*, lastnost (*i*), veljata tudi lastnosti
(*ii*)* $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$;
(*iii*)* $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ za vse $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Namreč, upoštevajoč (*i*) in (*ii*) oziroma (*i*) in (*iii*) lahko zapišemo

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= -\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{c} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},\\ \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) &= -(\lambda\vec{b}) \times \vec{a} = -\lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).\end{aligned}$$

Lastnosti (*ii*) in (*ii*)* pravita, da je vektorski produkt aditiven v obeh komponentah. Lastnosti (*iii*) in (*iii*)* pomenita homogenost vektorskega produkta v obeh komponentah.

Trditev 1.9. *Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna vektorja (kolinearna), potem je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. V posebnem primeru velja $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ za vsak $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.*

Dokaz. Naj bo $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Če upoštevamo antikomutativnost in homogenost vektorskega produkta, lahko zapišemo

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = -(\lambda\vec{a}) \times \vec{a} = -\lambda(\vec{a} \times \vec{a}) = -\vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Zato je $2(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ in $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. □

Opomba 1. Za bazne vektorje $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ velja poštevanka:
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$,
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$,
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}$,
$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

Lastnosti vektorskega produkta in poštevanka baznih vektorjev nam omogočajo izračun vektorskega produkta poljubnih vektorjev.

Trditev 1.10. *Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Tedaj velja*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Dokaz. Naj bo $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ in $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Upoštevajoč lastnosti vektorskega produkta lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\
&= a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) \\
&\quad + a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) \\
&\quad + a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) \\
&= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

in trditev je dokazana. □

Zgled 1. Naj bo $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Tedaj je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 \\ 9-1 \\ 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Za lažje računanje vpeljimo pojem determinante. *Determinanta reda* 2 je definirana kot izraz

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

in *determinanta reda* 3 je definirana z

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} \\
&= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.
\end{aligned}$$

Če je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ in $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, potem iz trditve 1.10 in definicije determinante sledi

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Zato lahko vektorski produkt računamo z uporabo formalne determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Lema 1.11. *Vektorski in skalarni produkt povezuje (Lagrangeova) identiteta*

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

za vse $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Dokaz. Naj imata vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ standardno označene komponente. Potem je

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \,, \\
|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2), \\
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \,.
\end{aligned}$$

Ko dane izraze poenostavimo do konca, ugotovimo, da dana identiteta velja. Izračun tega prepuščamo bralcu. □

Geometrijski pomen vektorskega produkta

Vektorski produkt ima lep geometrijski pomen.

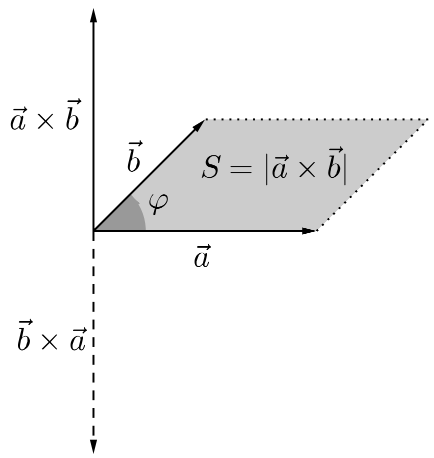
Izrek 1.12. *Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Potem velja:*

(i) vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na oba vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$;

(ii) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, kjer je $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$;

(iii) smer vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$ je določena po pravilu gibanja desnega vijaka pri zasuku $\vec{a}$ proti $\vec{b}$ po krajši poti.

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, ki je prikazan na sliki 1.24, je pravokoten na oba vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, torej $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ in $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$. Njegova norma je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Če za osnovnico paralelograma izberemo $\vec{a}$, potem je njegova višina $v = |\vec{b}| \sin\varphi$, kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Zato je $S = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$ ploščina paralelograma, ki predstavlja normo $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Smer vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$ določimo enolično po pravilu gibanja desnega vijaka.



Slika 1.24: Vektorski produkt

Dokaz izreka 1.12. (i) Dokažimo, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{a}\times\vec{b}$ pravokotna. Upoštevajoč (1.7) z neposrednim računom dobimo

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &= \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}\\ &= a_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+a_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+a_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\\ &= a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Podobno dokažemo pravokotnost vektorjev $\vec{b}$ in $\vec{a}\times\vec{b}$.

(ii) Dana lastnost sledi neposredno iz leme 1.11 in izreka 1.7:

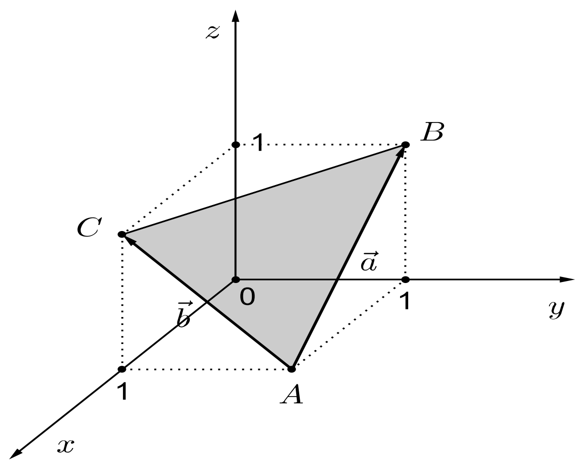
$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\varphi\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\varphi\right) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi.\end{aligned}$$

Ker je $\varphi\in[0,\pi]$, je $\sin\varphi\geq 0$ in velja $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.

(iii) Da ima vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ smer določeno po pravilu desnega vijaka, sledi iz poštevanke baznih vektorjev $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, kjer je smer določena po pravilu desnega vijaka. Formalni dokaz te lastnosti bralec najde v [5, poglavje XI, stran 115]. □

Opomba 2. Vektorja $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko je $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$. Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja, potem je $\{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.

Lastnost norme vektorskega produkta lahko v praksi uporabimo za računanje ploščine trikotnika.



Slika 1.25: Trikotnik ΔABC

Zgled 2. Izračunaj ploščino trikotnika, določenega s točkami $A\,(1,1,0)$, $B\,(0,1,1)$, $C\,(1,0,1)$, ki ga prikazuje slika 1.25.

Označimo z $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Potem je $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = -\vec{i} + \vec{k}$ in $\vec{b} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -\vec{j} + \vec{k}$ ter

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & -1 \\ \vec{k} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ker ploščina trikotnika ΔABC predstavlja polovico ploščine paralelograma, določenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, velja

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

V naslednji trditvi bomo spoznali geometrijski pomen determinante reda 2.

Trditev 1.13. *Absolutna vrednost determinante*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

predstavlja ploščino paralelograma, ki ga v $\mathbb{R}^2$ *določata vektorja*

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Vložimo ravninska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v prostor $\mathbb{R}^3$. Potem je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \vec{k}$$

vektor, ki je pravokoten na ravnino $\mathbb{R}^2$. Ker norma $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ predstavlja ploščino paralelograma, določenega z $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je trditev dokazana. □

Opomba 3. Naj bosta $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ vektorja v $\mathbb{R}^2$. Potem sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja natanko tedaj, ko je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Opomba 4. Vektorski produkt ni asociativen

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Na primer, naj bo $\vec{a} = \vec{i}, \vec{b} = \vec{j}, \vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$. Potem vidimo, da asociativnost vektorskega produkta ne velja

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{i} \times \vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{j} - \vec{i},$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{i} \times (\vec{j} \times (\vec{i} + \vec{j})) = \vec{i} \times (-\vec{k}) = \vec{j}.$$

Kako izračunamo $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$? To je vektor, ki je pravokoten na $\vec{a} \times \vec{b}$. Zato leži v ravnini, ki jo določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je oblike $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Zaključimo to poglavje z odgovorom na zastavljeno vprašanje in z znano Jacobijevo identiteto:

Trditev 1.14. *Za vse* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *velja*
(i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$,
(ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ *(Jacobijeva identiteta).*

Dokaz. *(i)* Uporabimo običajni zapis vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ po komponentah. Dokažimo dano enakost samo za prvo komponento. Za ostale komponente je dokaz podoben. Upoštevajoč (1.7) velja

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Željeno enakost sedaj preverimo neposredno z računom

$$\begin{aligned} ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})_{\vec{i}} &= (a_3b_1 - a_1b_3)\, c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_2 \\ &= a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 \\ &= (a_2c_2 + a_3c_3)\, b_1 - (b_2c_2 + b_3c_3)a_1 + a_1c_1b_1 - b_1c_1a_1 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\, b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1 \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})b_1 - (\vec{b} \cdot \vec{c})a_1 \\ &= ((\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a})_{\vec{i}}. \end{aligned}$$

(ii) Če upoštevamo lastnost *(i)* in komutativnost skalarnega produkta, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}, \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}, \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \end{aligned}$$

Ko na koncu vse dane enakosti seštejemo, vidimo, da smo dobili željeno identiteto $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$. □

Zgled 3. Podajmo še rešitev problema 3 iz prejšnjega podpoglavja z uporabo vektorskega produkta. V ravnini, določeni z $\vec{a}$ in $\vec{b}$, poišči vektor $\vec{d}$, ki je pravokoten na vektor $\vec{a}$. Ker vektor $\vec{d}$ leži v ravnini, določeni z $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je pravokoten na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Hkrati je $\vec{d}$ pravokoten na vektor $\vec{a}$. Zato lahko za $\vec{d}$ izberemo vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$. Po trditvi 1.14 sledi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} = |\vec{a}|^2\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}.$$

1.5 Mešani produkt

V tem podpoglavju bomo spoznali še tako imenovani mešani produkt, ki je kombinacija skalarnega in vektorskega produkta. Obravnavali bomo njegove lastnosti. Začnimo z definicijo.

Definicija. *Mešani produkt* vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ je definiran z

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Trditev 1.15. *Naj imajo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ običajen zapis po komponentah. Potem je*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Željeno lastnost preverimo neposredno z računom

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3 \\
&= a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

kjer upoštevamo definicije vektorskega in skalarnega produkta ter determinante. □

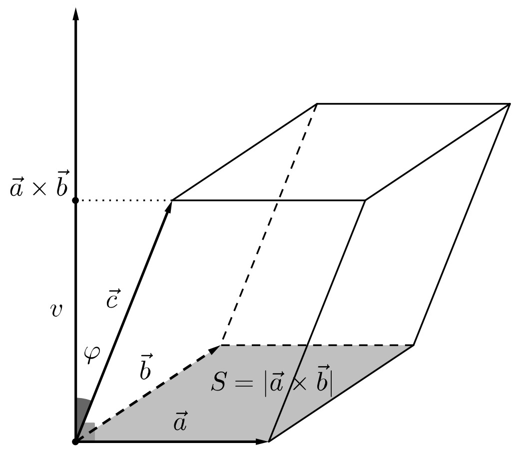
Trditev 1.16. *Absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralelepipeda, ki ga v $\mathbb{R}^3$ določajo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Dokaz. Za osnovno ploskev paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, izberimo paralelogram, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Glej sliko 1.26. Ploščina osnovne ploskve je enaka $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Označimo s φ kot, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$. Višina paralelepipeda je enaka normi projekcije vektorja $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, to pomeni $v = |\vec{c}||\cos\varphi|$. Po definiciji skalarnega produkta zato sledi

$$V = Sv = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\,|\cos\varphi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

in trditev je dokazana. □

Neposredno iz trditev 1.15 in 1.16 sledi geometrijski pomen determinante.



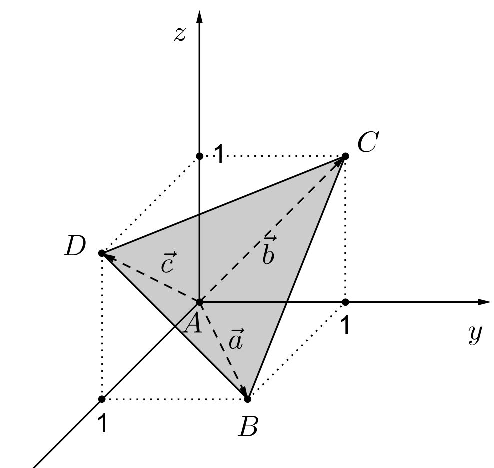
Slika 1.26: Paralelepiped, določen z $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

Posledica 1.17. *Absolutna vrednost determinante reda* 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

predstavlja prostornino paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *(stolpci determinante).*

Zgled. Izračunaj prostornino piramide, ki jo določajo oglišča $A\,(0,0,0)$, $B\,(1,1,0)$, $C\,(0,1,1)$ in $D\,(1,0,1)$.



Slika 1.27: Piramida $ABCD$

Označimo z $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ po vrsti krajevne vektorje točk B,C,D (glej sliko 1.27). Dani vektorji nam potem določajo tako piramido $ABCD$ kot ustrezen paralelepiped. Hitro ugotovimo, da prostornina piramide predstavlja 1/6 prostornine paralelepipeda:

$$V = \frac{1}{3}Sv = \frac{1}{3}\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\,|\cos\varphi| = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Ker je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2,$$

je prostornina piramide $ABCD$ enaka $V = 1/3$.

Izrek 1.18. *Mešani produkt vektorjev ima naslednje lastnosti:*

(i) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ *natanko tedaj, ko so* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *linearno odvisni vektorji (komplanarni);*

(ii) *mešani produkt je linearen v vsaki komponenti, kar za prvo komponento pomeni*

$$(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

za vse $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *in* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

(iii) *če v mešanem produktu med seboj zamenjamo dva vektorja, se spremeni predznak mešanega produkta.*

Dokaz. (i) Skalarni produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ je enak 0 natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$ pravokotna. To velja natanko tedaj, ko vektor $\vec{c}$ leži v ravnini, določeni z vektorjema $\vec{a}, \vec{b}$. Natanko tedaj so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni oziroma linearno odvisni.

(ii) Aditivnost in homogenost mešanega produkta po vsaki komponenti je posledica omenjenih lastnosti skalarnega in vektorskega produkta. Dokažimo lastnost za prvo komponento:

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) &= \Big((\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2) \times \vec{b}\Big) \cdot \vec{c} = \Big(\lambda(\vec{a}_1 \times \vec{b}) + \mu(\vec{a}_2 \times \vec{b})\Big) \cdot \vec{c} \\ &= \lambda(\vec{a}_1 \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \mu(\vec{a}_2 \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})\end{aligned}$$

(iii) Predpostaviti smemo, da so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ orientirani tako, da je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \geq 0$. Glej sliko 1.26. Zaradi antikomutativnosti vektorskega produkta velja:

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}), \\ (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}), \\ (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) &= (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).\end{aligned}$$

Enakost

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

sledi iz dejstva, da omenjeni mešani produkti predstavljajo prostornino istega paralelepipeda. □

Opomba. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pri tem stolpci v determinanti predstavljajo komponente danih vektorjev.

Izrek 1.19 (Lagrangeova identiteta). *Za vse* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ *velja*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

V posebnem primeru je $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Dokaz. V naslednjem računu upoštevamo, da medsebojna zamenjava vektorjev v mešanem produktu spremeni predznak in trditev 1.14, točka (i).

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) \\ &= -(\vec{c} \times \vec{d}, \vec{b}, \vec{a}) \\ &= -\Big((\vec{c} \times \vec{d}) \times \vec{b}\Big) \cdot \vec{a} \\ &= -\Big((\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d} - (\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c}\Big) \cdot \vec{a} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

Če izberemo $\vec{c} = \vec{a}$ in $\vec{d} = \vec{b}$, sledi

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Dobljeno enakost smo že spoznali v lemi 1.11. □

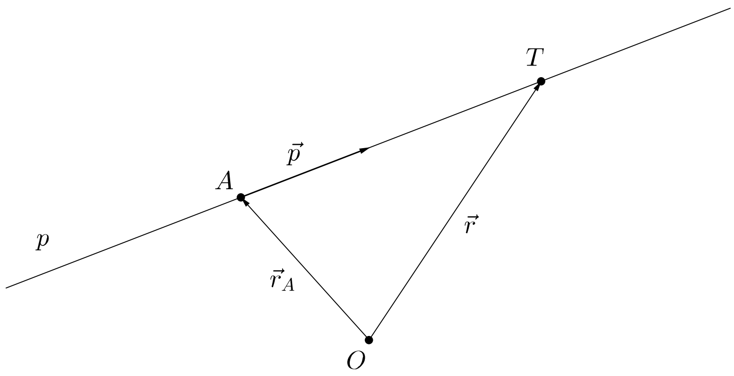
1.6 Enačbe premic in ravnin v $\mathbb{R}^3$

V tem podpoglavju bomo spoznali osnove analitične geometrije v $\mathbb{R}^3$. Poudarek bo na obravnavi enačb premic in ravnin ter njunem medsebojnem odnosu.

I. Enačba premice

Premica p v $\mathbb{R}^3$ je določena s točko A, ki leži na premici, in smernim vektorjem $\vec{p}$. Z $\vec{r}_A$ označimo krajevni vektor točke A in naj $\vec{r}$ označuje krajevni vektor poljubne točke T. Iz slike 1.28 je razvidno, da točka T leži na premici p natanko tedaj, ko velja

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$



Slika 1.28: Premica p

Ko parameter t preteče celo množico $\mathbb{R}$, nam enačba (1.8) opiše vse točke premice p. Enačba (1.8) se imenuje *vektorska oblika* enačbe premice. Naj bodo

$$A\left(x_0, y_0, z_0\right),\ T\left(x, y, z\right) \quad \text{in} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Ko vektorsko enačbo premice (1.8) predstavimo po komponentah

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

in razpišemo, dobimo zelo uporabno *parametrično obliko* enačbe premice

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \\ z = z_0 + p_3 t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Če iz parametrične enačbe premice izrazimo parameter t, dobimo še enačbo premice v *kanonični obliki*

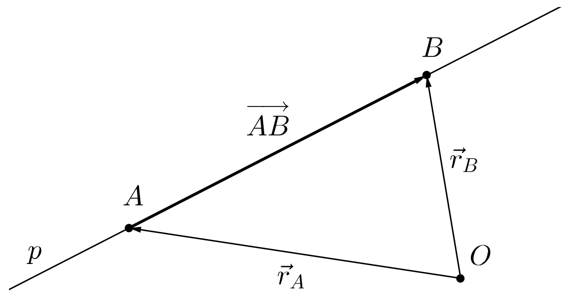
$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3} = t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Pri tem smo privzeli, da so vse komponente vektorja $\vec{p}$ različne od 0. Denimo, da je $p_3 = 0$, potem ima kanonična enačba premice obliko

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}, \quad z = z_0.$$

Zgled 1. Zapiši enačbo premice p (v vseh treh oblikah), ki poteka skozi točki $A\left(1, 2, 3\right)$ in $B\left(3, 2, 1\right)$.
Za smerni vektor premice p lahko izberemo usmerjeno daljico $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{p} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$



Slika 1.29: Premica, določena z A in B

Vektorska enačba premice, izražena s krajevnima vektorjema $\vec{r}_A, \vec{r}_B$, je potem

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p} = \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (1-t)\,\vec{r}_A + t\vec{r}_B, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opazimo, da nam množica točk, ko parameter t preteče interval $[0,1]$, predstavlja daljico AB. Parametrična enačba dane premice je torej:

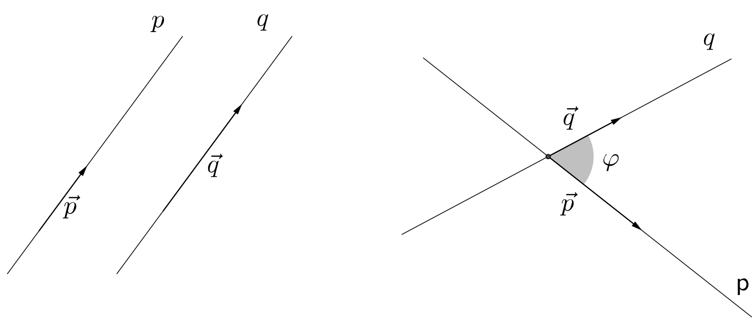
$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2 \\ z &=& 3-2t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R},$$

njena kanonična enačba pa:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-z}{2}, \quad y = 2.$$

Opomba 1. Premici p in q sta vzporedni natanko tedaj, ko sta njuna smerna vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$ kolinearna. To velja natanko tedaj, ko je $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$.

Opomba 2. Premici p in q sta lahko mimobežni, lahko pa se sekata. Kot med sekajočima premicama je enak kotu, ki ga določata vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$, torej $\varphi = \measuredangle(\vec{p}, \vec{q})$.



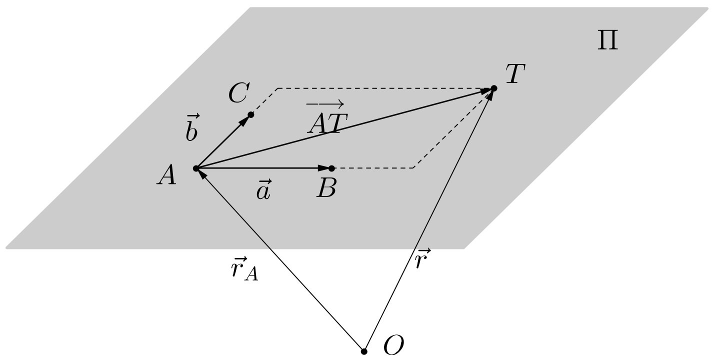
Slika 1.30: Premici p in q

Opomba 3. Enačba premice seveda ni določena enoznačno. Bralec lahko preveri, da premico p iz zgleda 1 določata tudi enačbi $2 - x = z - 2$, $y = 2$ in

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 2 \\ z & = & 2-t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}.$$

II. Enačba ravnine

Ravnina Π v $\mathbb{R}^3$ je določena s tremi točkami A, B, C, ki ne ležijo na isti premici. Vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ sta linearno neodvisna.



Slika 1.31: Ravnina Π

Iz slike 1.31 je razvidno, da točka T pripada ravnini Π natanko tedaj, ko so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\overrightarrow{AT}$ linearno odvisni. Torej obstajata realna parametra t, s, da velja $\overrightarrow{AT} = t\vec{a} + s\vec{b}$. Dobili smo vektorsko enačbo ravnine:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a} + s\vec{b}, \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Ko parametra t in s pretečeta realno os, enačba (1.11) opiše vse točke ravnine Π.

Naj bodo

$$A\left(x_0, y_0, z_0\right), \ T\left(x, y, z\right), \ \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Ko v enačbo ravnine (1.11) vstavimo ustrezne vektorje in zapišemo vsako komponento posebej, dobimo *parametrično obliko* enačbe ravnine

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + a_1 t + b_1 s \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 s \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 s \end{array}\right\} \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

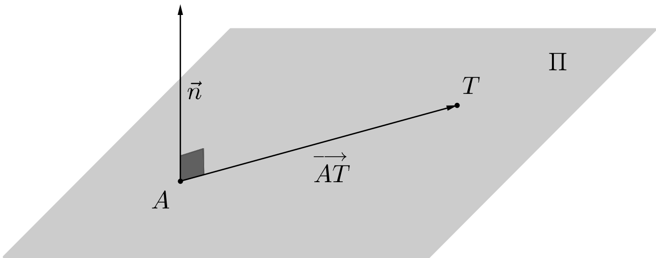
Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\overrightarrow{AT} = \vec{r} - \vec{r}_A$ so linearno odvisni, zato je njihov mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{r} - \vec{r}_A) = 0$. Kar lahko predstavimo tudi z determinanto

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x - x_0 \\ a_2 & b_2 & y - y_0 \\ a_3 & b_3 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Če dano determinanto razpišemo in uredimo, dobimo enačbo oblike

$$Ax + By + Cz = D, \tag{1.13}$$

ki se imenuje *normalna enačba ravnine*. V določeni literaturi se dana enačba imenuje tudi *splošna enačba ravnine*. Pri delu z ravninami običajno vedno uporabljamo normalno enačbo ravnine (1.13). Do normalne enačbe ravnine pridemo tudi iz parametrične oblike enačbe ravnine (1.12), kjer iz danih treh enačb odstranimo parametra t, s. Kaj nam predstavljajo števila A, B, C in D?



Slika 1.32: Normalni vektor ravnine

Ravnina Π je določena tudi s točko A in vektorjem $\vec{n}$, ki je pravokoten na dano ravnino. Glej sliko 1.32! Vektor $\vec{n}$ se imenuje *normalen vektor* ravnine Π. Ker je $\vec{n} \perp \vec{a}$ in $\vec{n} \perp \vec{b}$, lahko za normalni vektor ravnine izberemo vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$. Potem je točka $T \in \Pi$ natanko tedaj, ko velja

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \quad \text{oziroma} \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0.$$

Označimo z

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$0 = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Dobili smo razčlenjeno normalno enačbo ravnine (1.13). Vidimo, da nam A, B, C predstavljajo komponente normalnega vektorja $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ in $D = \vec{n} \cdot \vec{r}_A = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Zgled 2. Določimo normalno enačbo ravnine, ki poteka skozi točke $A\,(1,1,0)$, $B\,(0,1,1)$ in $C\,(1,0,1)$. Ugotovi, v katerih točkah dana ravnina seka koordinatne osi.

1. način: Najprej bomo do normalne enačbe ravnine prišli preko parametrične enačbe ravnine. Določimo vektorje

$$\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{b} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{AT} = \vec{r} - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a} + s\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dobimo parametrično enačbo ravnine

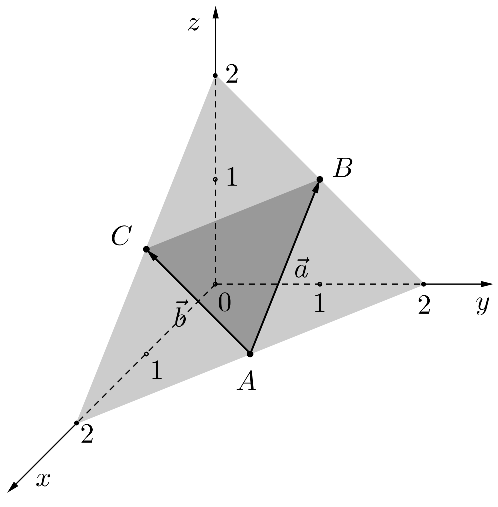
$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & 1-s \\ z & = & t+s \end{array}\right\} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Če dane tri enačbe seštejemo, dobimo normalno enačbo ravnine $x + y + z = 2$.

2. način: Izračunamo normalni vektor ravnine

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zato je $1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = D$. Ker točka $A\,(1, 1, 0)$ pripada ravnini, vstavimo koordinate točke A v dano enačbo in dobimo še $D = 2$. Torej je normalna enačba ravnine enaka $x + y + z = 2$.



Slika 1.33: Ravnina, določena z A, B, C

3. način: Normalno enačbo ravnine lahko dobimo tudi neposredno iz mešanega produkta oziroma determinante reda 3:

$$0 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \overrightarrow{AT} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -1 & y-1 \\ 1 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x-1 \\ -1 & y-1 \end{vmatrix} = x + y + z - 2.$$

Ravnina $x + y + z = 2$ seka koordinatne osi v točkah $T_x\,(2,0,0)$, $T_y\,(0,2,0)$ in $T_z\,(0,0,2)$. Vidimo, da se odseki, ki jih ravnina naredi na koordinatnih oseh, lepo vidijo iz enačbe

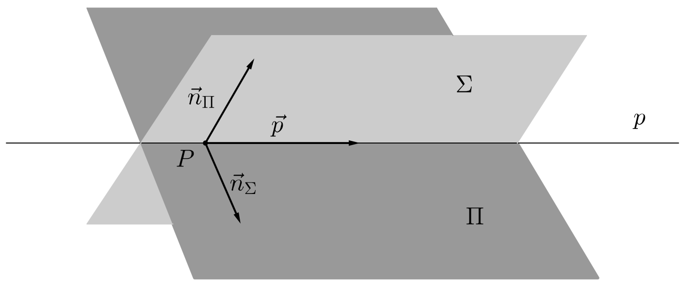
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1,$$

ki se zato imenuje tudi *odsekovna oblika* enačbe ravnine.

Problem 1. Dani sta ravnini $\Pi : 2x - 3y + 4z = 7$ in $\Sigma : x - y + z = 2$. Kaj je njun presek? Ko zapišemo normalna vektorja ravnin

$$\vec{n}_\Pi = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \vec{n}_\Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vidimo, da sta $\vec{n}_\Pi$ in $\vec{n}_\Sigma$ nekolinearna vektorja. To pomeni, da je presek danih ravnin premica, torej $p = \Pi \cap \Sigma$. Kako dobimo enačbo premice p?



Slika 1.34: Presek ravnin Π in Σ

1. način: geometrijski pristop. Premica p leži v ravninah Π in Σ. Zato je smerni vektor premice p pravokoten na oba normalna vektorja ravnin. Zato smemo za smerni vektor premice izbrati vektor

$$\vec{p} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Določimo še eno točko, ki leži na premici p, torej zadošča enačbama obeh ravnin

$$\begin{aligned} x-y+z&=2,\\ 2x-3y+4z&=7. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo pomnožimo z -2 in jo prištejemo k drugi, dobimo $-y+2z=3$. Dani enačbi zadoščata izbiri $y=1$ in $z=2$. Zato je $x=2+y-z=1$ in točka $A\,(1,1,2)$ leži na premici p. Parametrična enačba premice p se glasi

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 2+t \end{array}\right\} \quad t\in\mathbb{R}.$$

2. način: rešitev sistema linearnih enačb. Premica p je določena s sistemom dveh linearnih enačb s tremi neznankami:

$$\begin{aligned} x-y+z&=2,\\ 2x-3y+4z&=7. \end{aligned}$$

Da dobimo parametrično enačbo premice, moramo rešiti dani sistem. Odstranimo spremenljivko x iz druge enačbe. Kot zgoraj, prištejmo prvo enačbo, pomnoženo z -2, k drugi enačbi in dobimo

$$\begin{aligned} x-y+z&=2,\\ -y+2z&=3. \end{aligned}$$

Nadalje, odstranimo spremenljivko y iz prve enačbe. Pomnožimo drugo enačbo z -1 in jo prištejmo k prvi enačbi:

$$\begin{aligned} x-z&=-1,\\ -y+2z&=3. \end{aligned}$$

Nazadnje izrazimo spremenljivki x in y:

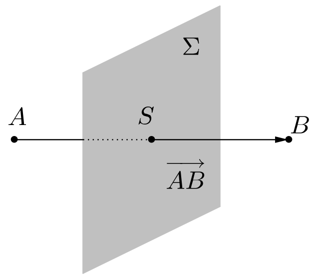
$$\begin{aligned} x&=-1+z,\\ y&=-3+2z, \quad z\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dobili smo parametrično enačbo premice, ki jo preoblikujmo v bolj domačo obliko

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& -1+t\\ y &=& -3+2t\\ z &=& t \end{array}\right\} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Premica p je določena s točko $A'\,(-1,-3,0)$ in smernim vektorjem $\vec{p}$.

Problem 2. Kaj je množica točk, ki so enako oddaljene od dveh točk A in B?



Slika 1.35: Ravnina Σ

Geometrijsko je iz slike 1.35 razvidno, da je to ravnina Σ, ki poteka skozi točko S, razpolovišče daljice AB, in ima normalni vektor $\overrightarrow{AB}$. Do želene množice točk lahko pridemo tudi na drugi način. Točka $T\,(x, y, z)$ je enako oddaljena od točk $A\,(a_1, a_2, a_3)$ in $B\,(b_1, b_2, b_3)$ natanko tedaj, ko velja $d\,(A, T) = d\,(B, T)$. To pomeni

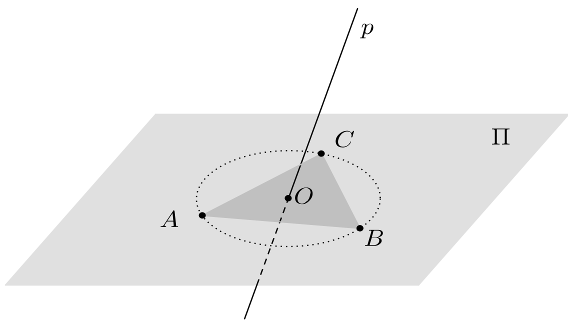
$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2 \, .$$

Ko dani izraz razpišemo in uredimo, dobimo enačbo ravnine

$$2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y + 2(b_3 - a_3)z = d,$$

kjer je $d = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$.

Problem 3. Kaj je množica točk, ki so enako oddaljene od treh točk A, B, C, ki ne ležijo na isti premici?



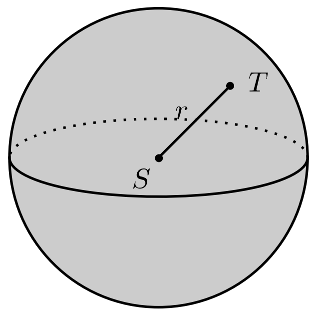
Slika 1.36: Premica p

Geometrijsko na podlagi skice 1.36 ugotovimo, da je to premica p, ki je pravokotna na ravnino Π, določeno s točkami A, B, C, in poteka skozi točko O, ki predstavlja središče očrtane krožnice trikotnika ΔABC. Enačbo premice p najlažje določimo kot presek ravnin Σ_1 in Σ_2. Pri tem je Σ_1 množica enako oddaljenih točk od A in B ter Σ_2 množica enako oddaljenih točk od A in C (glej problem 2). Središče očrtane krožnice O lahko nato določimo kot presek premice p in ravnine Π. Za vajo lahko bralec poišče središče očrtane krožnice O, če so dane točke $A\,(-1,-1,-1)$, $B\,(1,1,1)$ in $C\,(1,3,7)$.

III. Enačba sfere

Sfera, ki jo prikazuje slika 1.37, je množica točk iz $\mathbb{R}^3$, ki so enako oddaljene od točke S, ki se imenuje središče dane sfere. Sfera s središčem $S\,(x_0, y_0, z_0)$ in polmerom $r > 0$ ima enačbo $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{ST} = r^2$, kjer je $\overrightarrow{ST} = \vec{r} - \vec{r}_S$. Enačbo sfere lahko predstavimo tudi v obliki

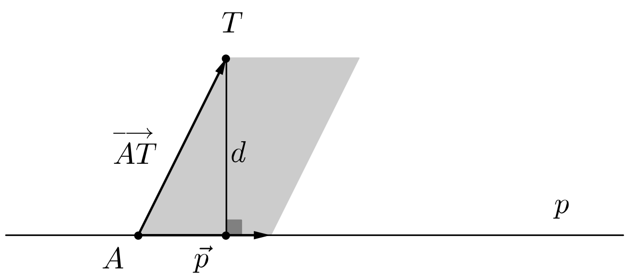
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$



Slika 1.37: Sfera

IV. Oddaljenosti

Razdaljo med dvema točkama v prostoru smo že spoznali, glej (1.5). Obravnavajmo še oddaljenosti točke od premice in ravnine ter oddaljenost dveh premic.



Slika 1.38: Oddaljenost točke od premice

Oddaljenost točke od premice. Naj bo premica p podana s točko A in smernim vektorjem $\vec{p}$ in naj bo T poljubna točka. Oddaljenost točke od premice $d\,(T,p)$ je definirana kot najmanjša razdalja med dano točko T in neko točko na premici. Če izrazimo ploščino paralelograma, označenega na sliki 1.38, na dva različna načina

$$S = |\vec{p}|\, d = |\vec{p} \times \overrightarrow{AT}|,$$

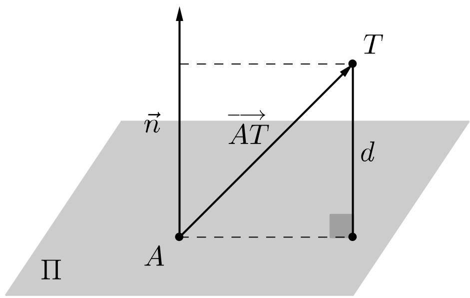
vidimo, da je iskana oddaljenost enaka

$$d\,(T, p) = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{AT}|}{|\vec{p}|}.$$

Oddaljenost točke od ravnine. Naj ima ravnina Π normalno enačbo $ax+by+cz = d$. Ravnina je določena s točko $A\,(x_0, y_0, z_0)$ in normalnim vektorjem

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Oddaljenost točke od ravnine $d\,(T, \Pi)$ je najkrajša razdalja dane točke od poljubne točke na ravnini.



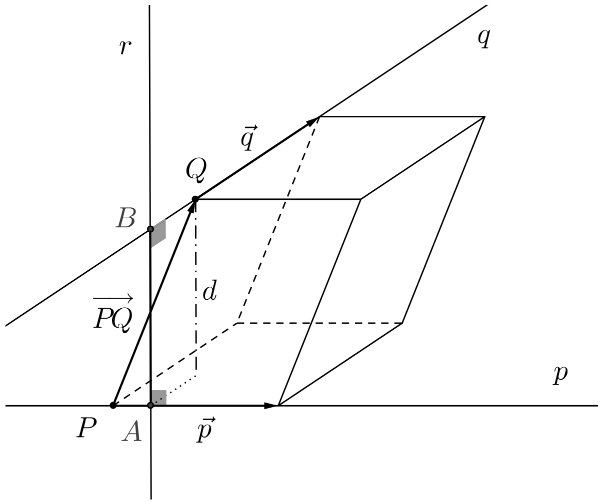
Slika 1.39: Oddaljenost točke od ravnine

Iz slike 1.39 je razvidno, da je oddaljenost točke $T\,(x, y, z)$ od ravnine Π enaka dolžini projekcije vektorja $\overrightarrow{AT} = \vec{r} - \vec{r}_A$ na normalni vektor $\vec{n}$. Torej

$$d\,(T, \Pi) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_A|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dani obrazec je še posebej ugoden za računanje v primeru, ko je $\vec{n}$ enotski vektor. Tedaj je $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$ in $d\,(T, \Pi) = |ax + by + cz - d|$.

Razdalja med dvema premicama. Naj bo premica p določena s točko P in smernim vektorjem $\vec{p}$ in podobno naj bo premica q določena s Q in $\vec{q}$. Razdalja med premicama $d\,(p, q)$ je enaka najkrajši razdalji med eno točko s premice p in eno točko s premice q. Če sta premici vzporedni, potem je njuna razdalja $d\,(p, q) = d\,(P, q)$, kar smo že obravnavali.



Slika 1.40: Oddaljenost premic p in q

Predpostavimo sedaj, da p in q nista vzporedni premici. Na podlagi slike 1.40 ugotovimo, da dve najbližji točki povezuje daljica AB, ki je pravokotna na obe premici. Daljica AB leži na premici r, določeni s smernim vektorjem $\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q}$. Zato je razdalja med premicama $d\,(p,q) = |\overrightarrow{AB}|$ in predstavlja dolžino projekcije vektorja $\overrightarrow{PQ}$ na vektor $\vec{p}\times\vec{q}$. Hkrati je $d\,(p,q)$ oddaljenost točke Q od ravnine, ki vsebuje premico p in ima normalni vektor $\vec{p}\times\vec{q}$. Torej $d\,(p,q)$ predstavlja višino paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}$. Če zapišemo prostornino tega paralelepipeda

$$V = |(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ})| = |\vec{p} \times \vec{q}|\, d,$$

dobimo eleganten obrazec za razdaljo med premicama, v katerem nastopata vektorski in mešani produkt:

$$d\,(p,q) = \frac{|(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Poglavje 2

Vektorji v $\mathbb{R}^n$

V tem poglavju bomo vpeljali vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ urejenih n-teric realnih števil in tako posplošili že obravnavani primer $\mathbb{R}^3$. Definirali bomo samo osnovne pojme iz splošne teorije vektorskih prostorov, ki jih bomo potrebovali pri nadaljnjem delu. Podrobneje se s teorijo vektorskih prostorov ukvarja t. i. linearna algebra.

2.1 Vektorski podprostor

Naj bo n naravno število. Z $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|x_i \in \mathbb{R}\}$ označimo množico vseh urejenih realnih n-teric. Točke v $\mathbb{R}^n$ bomo krajše označevali z $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$... Na množici $\mathbb{R}^n$ definiramo seštevanje $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}^n$ in množenje z realnimi skalarji $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in vsak $x \in \mathbb{R}^n$. Potem velja:

Trditev 2.1. *Seštevanje in množenje s skalarji v $\mathbb{R}^n$ zadoščata naslednjim lastnostim:*

$S1$ $x + y = y + x$ *za vse* $x, y \in \mathbb{R}^n$;
$S2$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ *za vse* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$;
$S3$ *Obstaja* $0 \in \mathbb{R}^n$, *da je* $x + 0 = x$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}^n$;
$S4$ *Za vsak* $x \in \mathbb{R}^n$ *obstaja* $-x \in \mathbb{R}^n$, *da je* $x + (-x) = 0$;
$M1$ $\lambda\,(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *za vse* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$;
$M2$ $(\lambda + \mu)\,x = \lambda x + \mu x$ *za vse* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$;
$M3$ $(\lambda\mu)\,x = \lambda\,(\mu x)$ *za vse* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$;
$M4$ $1x = x$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Dokaz dane trditve je rutinski in podoben dokazoma trditev 1.1 in 1.2. Zato ga prepustimo bralcu. Opomnimo samo, da je nevtralni element za seštevanje $0 =$

$(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ in nasproten element elementa $x \in \mathbb{R}^n$ je $-x = -(x_1, x_2, ..., x_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$. $\square$

Opomba 1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ je primer realnega vektorskega prostora. Njegovi elementi so vektorji, ki jih predstavljajo urejene n-terice: $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. V določenih primerih bomo za vektorje v $\mathbb{R}^n$ uporabili tudi model v obliki vrstičnega ali stolpčnega zapisa; torej

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{ali} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zaradi lažjega zapisa praviloma uporabljamo zapis vektorjev v obliki urejenih n-teric.

Zgled 1. Naj bosta $x = (1, 2, 3, 4, 5)$ in $y = (5, 4, 3, 2, 1)$ vektorja iz $\mathbb{R}^5$. Potem je

$$x + y = (1, 2, 3, 4, 5) + (5, 4, 3, 2, 1) = (6, 6, 6, 6, 6) = 6\,(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5.$$

Definicija. Neprazna množica $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je *vektorski podprostor* v $\mathbb{R}^n$, če velja
(i) za vse $x, y \in V$ je tudi $x + y \in V$,
(ii) za vsak $x \in V$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ je tudi $\lambda x \in V$.

Opomba 2. Točki (i) in (ii) iz definicije vektorskega podprostora povesta, da je množica V zaprta za seštevanje in množenje s skalarji. Zato je V vektorski prostor, saj zadošča lastnostim $S1$–$S4$ in $M1$–$M4$. Vektor 0 je vedno element V. Ker je $V \neq \emptyset$, obstaja $x \in V$. Upoštevajoč $1 + 0 = 1$, lahko zapišemo $(1 + 0)\,x = 1x$. Zaradi $M2$ velja $1x + 0x = 1x$ in po (ii) sledi $0x = 0 \in V$.

Opomba 3. Točki (i) in (ii) iz definicije vektorskega podprostora lahko nadomestimo z ekvivalentno zahtevo, da je $\lambda x + \mu y \in V$ za vse $x, y \in V$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. V praksi, ko preverjamo ali je določena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ vektorski podprostor, običajno uporabljamo omenjeno ekvivalentno obliko.

Zgled 2. Oglejmo si nekatere primere vektorskih podprostorov.

1. Naj bo $\vec{0} \neq \vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Potem je $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{a} \cdot \vec{x} = 0\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Dokažimo, da za vse $\vec{x}, \vec{y} \in V$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V$. Po predpostavki je $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{y} = 0$. Upoštevajoč lastnosti skalarnega produkta, lahko zapišemo

   $$\vec{a} \cdot (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{x}) + \mu\,(\vec{a} \cdot \vec{y}) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

   in vidimo, da vektor $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ pripada V. Množica V vsebuje vse vektorje, ki so pravokotni na vektor $\vec{a}$, in geometrijsko predstavlja ravnino z normalnim vektorjem $\vec{a}$, ki poteka skozi izhodišče.

2. Naj bo spet $\vec{0} \neq \vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Potem je tudi $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Naj bosta $\vec{x}, \vec{y} \in U$ poljubna vektorja in λ, μ poljubna realna skalarja. Po predpostavki je $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ in $\vec{a} \times \vec{y} = \vec{0}$. Upoštevajoč lastnosti vektorskega produkta velja

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{x}) + \mu (\vec{a} \times \vec{y}) = \lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}.$$

Zato je $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in U$ in U je vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Vemo, da je $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ natanko tedaj, ko sta $\vec{a}$ in $\vec{x}$ kolinearna vektorja; $\vec{x} = \lambda \vec{a}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Zato $U = \{\lambda \vec{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ predstavlja premico, ki poteka skozi izhodišče in ima smerni vektor $\vec{a}$.

3. Množica

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 + x_2 = 0, x_4 - x_5 = 0\right\}$$

je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^5$. Ker je $x_2 = -x_1$ in $x_5 = x_4$, lahko zapišemo

$$V = \left\{(x_1, -x_1, x_3, x_4, x_4) \in \mathbb{R}^5 | x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Preverimo zaprtost množice V za seštevanje in množenje s skalarji. Naj bosta $x = (x_1, -x_1, x_3, x_4, x_4), y = (y_1, -y_1, y_3, y_4, y_4) \in V$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda (x_1, -x_1, x_3, x_4, x_4) + \mu (y_1, -y_1, y_3, y_4, y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1, -\lambda x_1 - \mu y_1, \lambda x_{31} + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4, \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (z_1, -z_1, z_3, z_4, z_4). \end{aligned}$$

Vidimo, da je $\lambda x + \mu y \in V$.

4. Množica

$$V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $z = \lambda x + \mu y$, kjer sta $x, y \in V$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned} z = \lambda x + \mu y &= \lambda (x_1, x_2, ..., x_n) + \mu (y_1, y_2, ..., y_n) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ..., \lambda x_n + \mu y_n). \end{aligned}$$

Po predpostavki je $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ in $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$. Zato je

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + \cdots + z_n &= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) \\ &= \lambda (x_1 + x_2 + ... + x_n) + \mu (y_1 + y_2 + ... + y_n) \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0 \end{aligned}$$

in vektor $z = \lambda x + \mu y$ pripada V.

Trditev 2.2. *Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^n$. Tedaj sta tudi njun* ***presek*** *$U \cap V = \{x | x \in U, x \in V\}$ in* ***vsota*** *$U + V = \{u + v | u \in U, v \in V\}$ vektorska podprostora.*

Dokaz. Dokažimo, da je $U \cap V$ vektorski podprostor. Naj bosta $x, y \in U \cap V$ poljubna vektorja in λ, μ poljubna skalarja. Ker je $U \cap V \subseteq U$, sta $x, y \in U$. Ker je U vektorski podprostor, velja $\lambda x + \mu y \in U$. Podobno je tudi $\lambda x + \mu y \in V$. Torej je $\lambda x + \mu y \in U \cap V$ in $U \cap V$ je vektorski podprostor.

Vsoto $U + V$ vektorskih podprostorov U in V tvorijo vsi vektorji x, ki se zapišejo v obliki vsote $x = u + v$, kjer je $u \in U, v \in V$. Naj bosta $x_1 = u_1 + v_1$ in $x_2 = u_2 + v_2$ poljubna elementa iz $U + V$ in λ, μ realna skalarja. Lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\lambda x + \mu y &= \lambda (u_1 + v_1) + \mu (u_2 + v_2) \\ &= (\lambda u_1 + \mu u_2) + (\lambda v_1 + \mu v_2) \\ &= u' + v'.\end{aligned}$$

Ker je U vektorski podprostor, je $u' = \lambda u_1 + \mu u_2 \in U$ in podobno velja $v' = \lambda v_1 + \mu v_2 \in V$. Zato je $\lambda x + \mu y = u' + v' \in U + V$. Torej je $U + V$ vektorski podprostor. □

Zgled 3. Pravi vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ (različni od $0, \mathbb{R}^3$) so ravnine in premice, ki vsebujejo izhodišče.

1. Naj bosta Π in Σ različni ravnini v $\mathbb{R}^3$, ki potekata skozi izhodišče. Tedaj je $\Pi \cap \Sigma$ premica, v kateri se sekata ravnini Π in Σ.

2. Naj bosta p in q različni premici v $\mathbb{R}^3$, ki potekata skozi izhodišče. Tedaj je $p + q$ ravnina, ki vsebuje premici p in q.

Opomba 4. Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^n$. Potem velja $U \cap V \subseteq U \subseteq U + V$ in $U \cap V \subseteq V \subseteq U + V$. Nadalje, presek $U \cap V$ je največji vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ (glede na inkluzijo $\subseteq$), ki je vsebovan v podprostorih U, V. Medtem ko je vsota $U + V$ najmanjši vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje oba podprostora U, V.

Naj bodo $v_1, v_2, ..., v_m$ vektorji iz $\mathbb{R}^n$. Kateri vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje dane vektorje? Iskani vektorski podprostor se imenuje *linearna lupina* vektorjev $v_1, v_2, ..., v_m$ in vsebuje vse *linearne kombinacije* danih vektorjev:

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m | \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

To sledi iz naslednje trditve.

Trditev 2.3. *Vektorski prostor $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ je najmanjši vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje množico $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$.*

Dokaz. Naj bosta $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$ in $y = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_m v_m$ poljubna vektorja iz V. Potem velja

$$\begin{aligned}x + y &= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \cdots + (\lambda_m + \mu_m) v_m \in V, \\ \lambda x &= (\lambda \lambda_1) v_1 + (\lambda \lambda_2) v_2 + \cdots + (\lambda \lambda_m) v_m \in V\end{aligned}$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$. Zato je V vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Denimo, da vektorski podprostor U vsebuje množico $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Ker je množica U zaprta za množenje s skalarji, vsebuje U vektorje $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, ..., \lambda_m v_m$ za vse $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Ker je U zaprta množica za seštevanje, U vsebuje tudi vsako linearno kombinacijo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$. Zato je $V \subseteq U$ in V je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, ..., v_m$. $\square$

V naslednjem podpoglavju bomo videli, da za vsak vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ obstajajo vektorji $v_1, v_2, ..., v_m \in V$, s katerimi je ta generiran. Zato lahko vsak vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ predstavimo v obliki $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$.

2.2 Linearna neodvisnost in baza

Podobno kot pri geometrijskih vektorjih je tudi pri vektorjih v $\mathbb{R}^n$ *linearna kombinacija* vektorjev $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ in skalarjev $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ vektor

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \in \mathbb{R}^n.$$

Prav tako so vektorji $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ *linearno neodvisni*, če je edino njihova trivialna linearna kombinacija enaka 0, to pomeni

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Če vektorji niso linearno neodvisni, so *linearno odvisni.* Podobno kot v $\mathbb{R}^3$ definiramo tudi bazo vektorskega podprostora.

Definicija. Množica $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ je baza vektorskega podprostora $V \subseteq \mathbb{R}^n$, če velja
(i) vektorji $v_1, v_2, ..., v_m$ so linearno neodvisni,
(ii) $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$.

Opomba 1. Točka (ii) iz definicije baze podprostora pravi, da se da vsak vektor $v \in V$ zapisati v obliki linearne kombinacije $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Izrek 2.4. *Množica $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ je baza vektorskega podprostora $V \subseteq \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko se vsak $v \in V$ enolično zapiše kot $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Naj bo $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ baza vektorskega podprostora $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažimo enoličnost zapisa. Denimo, da vektor v zapišemo v oblikah

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \quad \text{in} \quad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_m v_m.$$

Potem je

$$(\lambda_1 - \mu_1)\, v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\, v_2 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m)\, v_m = 0.$$

Ker so vektorji $v_1, v_2, ..., v_m$ linearno neodvisni, sledi enoličnost zapisa $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, ..., \lambda_m = \mu_m$.

Obratno. Predpostavimo, da je zapis vsakega vektorja v obliki linearne kombinacije vektorjev $v_1, v_2, ..., v_m$ enoličen. Pogoj (ii) iz definicije baze je očitno izpolnjen. Dokažimo točko (i). Ničelni vektor lahko vedno predstavimo s trivialno linearno kombinacijo $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_m$. Če je hkrati še $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$, zaradi enoličnosti zapisa sledi $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_m = 0$. To pomeni, da so vektorji $v_1, v_2, ..., v_m$ linearno neodvisni. Zato je $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ baza vektorskega podprostora V. $\square$

Omenimo dve dejstvi, ki pa ju ne bomo dokazovali, ker se dokažeta pri predmetu Linearna algebra.

Dejstvo 1. Vsak vektorski prostor V ima bazo. Baza je maksimalna linearno neodvisna množica vektorjev iz V.

Dejstvo 2. Vse baze vektorskega prostora imajo isto moč.

Zato definiramo, da je *razsežnost* ali *dimenzija* vektorskega podprostora $V \subseteq \mathbb{R}^n$ moč njegove baze. Če ima vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ razsežnost enako m, bomo to krajše označili z $\dim V = m$.

Zgled 2. Oglejmo si nekatere primere baz vektorskih podprostorov.

1. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je n razsežen, zapišemo $\dim \mathbb{R}^n = n$, in tako imenovano *standardno bazo* tega prostora tvorijo vektorji

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), \cdots, e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Namreč, vsak vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 (1, 0, ..., 0) + x_2 (0, 1, ..., 0) + \cdots + x_n (0, 0, ..., 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n. \end{aligned}$$

2. Naj bo $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 + x_2 = 0, x_4 - x_5 = 0\}$. V tretji točki zgleda 2 v prejšnjem podpoglavju smo videli, da je

$$V = \{(x_1, -x_1, x_3, x_4, x_4) | x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Vsak vektor $x \in V$ lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} x &= (x_1, -x_1, x_3, x_4, x_4) \\ &= x_1 (1, -1, 0, 0, 0) + x_3 (0, 0, 1, 0, 0) + x_4 (0, 0, 0, 1, 1) \\ &= x_1 v_1 + x_3 v_2 + x_4 v_3. \end{aligned}$$

Ker je omenjeni zapis enoličen, je množica

$$B = \{(1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\}$$

baza prostora V in $\dim V = 3$. Standardno bazo prostora $\mathbb{R}^5$ tvorijo vektorji $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Vektorji baze B se s standardnimi vektorji izražajo v obliki $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_3$ in $v_3 = e_4 + e_5$.

Do razsežnosti in baze vektorskega prostora V lahko pridemo tudi hitreje. Vidimo, da imamo za določitev vektorjev iz V tri proste realne parametre x_1, x_3, x_4. Zato je $\dim V = 3$. Bazne vektorje dobimo z neodvisnim izborom

$$\begin{aligned} x_1 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_1 = (1, -1, 0, 0, 0)\,, \\ x_1 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_2 = (0, 0, 1, 0, 0)\,, \\ x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1 \quad &\Rightarrow \quad v_3 = (0, 0, 0, 1, 1)\,. \end{aligned}$$

3. Naj bo $V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$. Vzemimo poljuben vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V$. Potem velja $x_1 = -x_2 - x_3 - ... - x_n$ in lahko zapišemo

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ &= (-x_2 - x_3 - \cdots - x_n, x_2, x_3, ..., x_n) \\ &= x_2\,(-1, 1, 0, ..., 0) + x_3\,(-1, 0, 1, ..., 0) + \cdots + x_n\,(-1, 0, 0, ..., 1)\,. \end{aligned}$$

Zaradi enoličnosti zapisa sledi, da je

$$B = \{(-1, 1, 0, ..., 0)\,, (-1, 0, 1, ..., 0)\,, \cdots, (-1, 0, 0, ..., 1)\}$$

primer baze prostora V in $\dim V = n - 1$. Če uporabimo standardne bazne vektorje e_i, lahko zapišemo $B = \{e_2 - e_1, e_3 - e_1, ..., e_n - e_1\}$.

Tudi v tem primeru za določitev vektorskega podprostora V prosto izbiramo $n - 1$ parametrov $x_2, x_3, ..., x_n$. Zato je $\dim V = n - 1$. Ko izberemo $x_2 = 1$ in $x_3 = ... = x_n = 0$, dobimo $x_1 = -1$ in prvi bazni vektor $e_2 - e_1 = (-1, 1, 0, ..., 0)$. Podobno nadaljujemo.

Problem. Kako preverimo, ali so vektorji $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ linearno neodvisni? Kako poiščemo koeficiente linearne kombinacije pri razvoju vektorja v po bazi B?

Oba omenjena problema rešimo z uporabo sistemov linearnih enačb. Demonstrirajmo to na naslednjem zgledu. Sisteme linearnih enačb bomo sistematično obravnavali v 4. poglavju. Ko razvijemo potrebna orodja, bomo znali tudi elegantno iskati baze vektorskih podprostorov in dokazovati linearno neodvisnost.

Zgled 3. Dokažimo, da so vektorji $v_1 = (1, -1, 0)\,, v_2 = (1, 1, 1)\,, v_3 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisni in razvijmo vektor $v = (2, -3, -2)$ po bazi $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Linearna neodvisnost pomeni, da iz $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Pri delu s sistemi linearnih enačb je elegantno uporabljati zapis vektorjev v obliki stolpcev. Če torej vektorje v_1, v_2, v_3 predstavimo v stolpčni obliki, lahko zapišemo

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorji v_1, v_2, v_3 so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

samo trivialno rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Poiščimo rešitev tega sistema enačb. V ta namen prištejmo drugo in tretjo enačbo k prvi in dobimo

$$\begin{aligned} 3\lambda_2 &= 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi, da je $\lambda_2 = 0$, iz preostalih pa še $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ in $\lambda_3 = -\lambda_2 = 0$. Dokazali smo linearno neodvisnost vektorjev v_1, v_2, v_3. Zato je množica $\{v_1, v_2, v_3\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$.

Izrazimo še vektor $v = (2, -3, -2)$ v obliki linearne kombinacije $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. V stolpčnem zapisu vektorjev to pomeni

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ponovno moramo rešiti sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 2, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= -3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= -2. \end{aligned}$$

Tudi tokrat prištejemo drugo in tretjo enačbo k prvi

$$\begin{aligned} 3\lambda_2 &= -3, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= -3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= -2. \end{aligned}$$

Potem je $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = \lambda_2 + 3 = 2$ in $\lambda_3 = -2 - \lambda_2 = -1$. Zato je $v = 2v_1 - v_2 - v_3$.

Zaključimo to poglavje s tako imenovano dimenzijsko formulo in z zgledom uporabe te formule. Omenjena formula povezuje razsežnosti podprostorov $U, V, U + V$ in $U \cap V$.

Trditev 2.5 (Dimenzijski izrek). *Naj bosta $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorska podprostora. Potem velja* $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

Skica dokaza. Označimo z $B_{U\cap V} = \{w_1, ..., w_k\}$ bazo prostora $U \cap V$. Ker je $U \cap V \subseteq U$, lahko bazo $B_{U\cap V}$ dopolnimo do baze $B_U = B_{U\cap V} \cup \{u_1, ..., u_i\}$ prostora U. Podobno, ker je $U \cap V \subseteq V$, dopolnimo bazo $B_{U\cap V}$ do baze $B_V = B_{U\cap V} \cup \{v_1, ..., v_j\}$ prostora V. Vsak vektor iz $U + V$ je vsota vektorjev $u + v$, kjer je $u \in U$ in $v \in V$. Zato se vsak vektor $u + v$ zapiše kot linearna kombinacija vektorjev $w_1, ..., w_k, u_1, ..., u_i, v_1, ..., v_j$, ki so linearno neodvisni vektorji. Torej, množica $B_{U+V} = B_U \cup (B_V \backslash B_{U\cap V})$ je baza prostora $U + V$. Zato velja $|B_{U+V}| = |B_U| + |B_V| - |B_{U\cap V}|$ in dimenzijska formula je dokazana. □

Zgled 4. Določimo dimenzije in baze vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V, U + V$, če je

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^5 | x_1 + 2x_5 = 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\} \quad \text{in}$$
$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^5 | x_1 - 2x_5 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0\right\}.$$

Podprostor U je določen z enačbama

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Iz danih enačb lahko izrazimo prvi dve spremenljivki

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_5, \\ x_2 &= -x_3 - x_4 + 2x_5, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ki sta odvisni od $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Zato ima $x \in U$ obliko

$$\begin{aligned} x &= (-2x_5, -x_3 - x_4 + 2x_5, x_3, x_4, x_5) \\ &= x_3 (0, -1, 1, 0, 0) + x_4 (0, -1, 0, 1, 0) + x_5 (-2, 2, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Velja $\dim U = 3$, saj so vektorji $(0, -1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (-2, 2, 0, 0, 1)$ linearno neodvisni in baza $B_U = \{(0, -1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (-2, 2, 0, 0, 1)\}$.

Podprostor V je določen s tremi enačbami

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo, pomnoženo z -1, prištejemo k drugi in nato drugo k tretji, dobimo

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_5 &= 0, \\ -x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tako lahko izrazimo prve tri spremenljivke

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_5, \\ x_2 &= -x_4 + 2x_5, \\ x_3 &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

ki so odvisne od $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Vsak vektor $x \in V$ je oblike

$$x = (2x_5, -x_4 + 2x_5, 0, x_4, x_5) = x_4\,(0, -1, 0, 1, 0) + x_5\,(2, 2, 0, 0, 1)\,.$$

Vidimo, da je $\dim V = 2$ in baza $B_V = \{(0, -1, 0, 1, 0)\,, (2, 2, 0, 0, 1)\}$.

Po definiciji $U \cap V$ vsebuje vse vektorje $x \in \mathbb{R}^5$, ki rešijo enačbe

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Ker smo te enačbe že izražali, si pomagamo z (2.1) in (2.2) ter vidimo

$$x_1 = x_3 = x_5 = 0 \quad \text{in} \quad x_2 = -x_4,$$

kjer je $x_4 \in \mathbb{R}$. Zato je $\dim U \cap V = 1$ ter baza $B_{U\cap V} = \{(0, -1, 0, 1, 0)\}$.

Določimo še razsežnost in primer baze prostora $U + V$. Po dimenzijskem izreku je

$$\dim\,(U + V) = \dim U + \dim V - \dim\,(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Ker smo baze prostorov $U, V, U \cap V$ izbrali tako kot v dokazu trditve 2.5, $B_{U\cap V} \subseteq B_U$ in $B_{U\cap V} \subseteq B_V$, lahko za primer baze prostora $U + V$ vzamemo

$$B_{U+V} = \{(0, -1, 1, 0, 0)\,, (0, -1, 0, 1, 0)\,, (-2, 2, 0, 0, 1)\,, (2, 2, 0, 0, 1)\}\,.$$

Poglavje 3

Matrike

V tem poglavju bomo spoznali nov matematični koncept – matrike. Matrike so zelo široko uporabne. Obravnavali bomo računske operacije na matrikah, definirali nekatere posebne matrike in predstavili zglede uporabe matrik.

3.1 Računske operacije na matrikah

Naj bosta m in n naravni števili. Realna *matrika* je pravokotna tabela števil

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

kjer je $a_{ij} \in \mathbb{R}$ za vse $i = 1, 2, ..., m$ in $j = 1, 2, ..., n$. Pravimo, da ima matrika A m vrstic in n stolpcev oziroma je *velikosti* (*razsežnosti, dimenzije*) $m \times n$.

Zgled 1. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrike A, B, C imajo po vrsti velikost 3×3, 4×3 in 4×1.

Matrike običajno označujemo z velikimi tiskanimi črkami A, B, C, X, Y... Števila, ki ležijo v matriki, se imenujejo *elementi*. Vsak element a_{ij} ima natanko določeno lego, nahaja se v i-ti vrstici in j-tem stolpcu. Množico vseh realnih $m \times n$ matrik bomo označili z $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Matrike bomo krajše označevali z

$$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

V posebnem primeru lahko matrike iz množic $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ in $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ identificiramo z vektorji iz $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Stolpci matrike $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ki jih je n, so stolpčni vektorji

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ \cdots, \ A^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

in vrstice, ki jih je m, so vrstični vektorji

$$A_1 = [a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}],\ A_2 = [a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n}],\ \cdots, A_m = [a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn}].$$

Kadar želimo poudariti vrstično ali stolpčno sestavo matrike z vektorji v $\mathbb{R}^m$ oz. $\mathbb{R}^n$, uporabimo oznako $A = [A_1\ A_2\ ...\ A_m] = [A^1\ A^2\ ...\ A^n]$.

Zgled 2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2\times 4}(\mathbb{R}).$$

Matriko $A = [A_1\ A_2]$ sestavljata vrstična vektorja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

iz $\mathbb{R}^4$ in štirje stolpčni vektorji

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ A^4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

iz $\mathbb{R}^2$. Zato lahko zapišemo tudi $A = [A^1\ A^2\ A^3\ A^4]$.

Če je $m = n$, pravimo, da je matrika A *kvadratna.* Množico vseh kvadratnih $n \times n$ matrik označimo z $M_n(\mathbb{R})$.

Zgled 3. Primeri kvadratnih matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Definicija. Matriki $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sta enaki, označimo $A = B$, če je $a_{ij} = b_{ij}$ za vse $i = 1, 2, ..., m$ in $j = 1, 2, ..., n$.

Seštevanje matrik

Naj bosta $A = [a_{ij}]$ in $B = [b_{ij}]$ matriki iste velikosti $m \times n$. Tedaj je njuna vsota $A + B$ definirana kot $m \times n$ matrika z elementi $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. To pomeni, da dve matriki enake velikosti seštejemo tako, da seštejemo enakoležne elemente:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] .$$

Zgled 4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Trditev 3.1. *Za seštevanje matrik v množici $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ velja:*
$S1$ $A + B = B + A$ za vse $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
$S2$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ za vse $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
$S3$ Obstaja $0 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, da je $A + 0 = A$ za vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
$S4$ Za vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ obstaja $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, da je $A + (-A) = 0$.

Dokaz. Seštevanje matrik je preko elementov definirano z običajnim seštevanjem realnih števil. Ker je seštevanje v $\mathbb{R}$ komutativno in asociativno, veljata $S1$ in $S2$ tudi v $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Zapišemo lahko

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}]$$

in

$$\begin{aligned} ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] &= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) . \end{aligned}$$

Nevtralen element za seštevanje v množici $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ je ničelna matrika

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) ,$$

ker za vsako matriko A velja $A + 0 = [a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A$. Nasproten element matrike $A = [a_{ij}]$ je matrika $-A = [-a_{ij}]$, ki vsebuje nasprotne elemente. Velja namreč

$$A + (-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0] = 0.$$

$\square$

Množenje matrik s skalarji

Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$ in $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Tedaj je $\lambda A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ matrika z elementi $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$. To pomeni, da matriko s skalarjem pomnožimo tako, da s skalarjem pomnožimo vsak njen element: $\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$.

Zgled 5.

$$3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}, \quad -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trditev 3.2. *Za množenje matrik s skalarji v množici $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ veljajo naslednje lastnosti:*

$M1$ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in vse $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
$M2$ $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ za vse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
$M3$ $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ za vse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
$M4$ $1A = A$ za vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Dokaz. Upoštevajoč definicijo matričnega seštevanja in množenja s skalarji ter distributivnosti seštevanja v $\mathbb{R}$ lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\lambda(A+B) &= \lambda([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] \\ &= [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] \\ &= \lambda A + \lambda B.\end{aligned}$$

Torej $M1$ velja. Dokaz ostalih lastnosti poteka podobno in je prepuščen bralcu. □

Množenje matrik

Naj bo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ matrika velikosti $m\times n$ in $B = [b_{ij}] \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ matrika velikosti $n \times r$. Tedaj je produkt matrik A in B matrika $AB = [c_{ij}] \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$ velikosti $m \times r$, katere elementi so enaki

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Zgled 6. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Potem je AB matrika velikosti 2×2:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+9 & 2+6+12 \\ 2+6+12 & 4+9+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$$

in BA matrika velikosti 3×3:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+6 & 3+8 \\ 2+6 & 4+9 & 6+12 \\ 3+8 & 6+12 & 9+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \\ 11 & 18 & 25 \end{bmatrix}.$$

Opomba 1. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^n$ vektorja. Vektor A predstavimo v vrstični obliki in vektor B predstavimo v stolpčni obliki. To pomeni $A \in M_{1\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Če dana vektorja kot matriki zmnožimo, dobimo *skalarni produkt* vektorjev $A, B \in \mathbb{R}^n$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

V posebnem primeru, ko je $n = 3$, je to običajni skalarni produkt, definiran v podpoglavju 1.3. Skalarni produkt v $\mathbb{R}^n$ zadošča vsem lastnostim, ki so navedene v trditvi 1.4. Dokaz tega je rutinski in prepuščen bralcu. Z uporabo skalarnega produkta lahko na produkt matrik $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ in $B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ gledamo na naslednji način: (i,j)-ti element matrike AB je skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. To pomeni $(AB)_{ij} = A_i \cdot B^j$ in lahko zapišemo

$$AB = [A_1\ A_2 \cdots A_m]\left[B^1\ B^2 \cdots B^r\right] = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^r \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^r \end{bmatrix}.$$

Zgled 7. Dan je sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned}$$

Z uporabo matričnega množenja lahko ta sistem zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

in krajše $Ax = b$, kjer je $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrika in sta $x, b \in \mathbb{R}^3$ stolpčna vektorja.

Opomba 2. Če obstaja AB, ne obstaja nujno BA. Na primer, za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

obstaja produkt

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ne obstaja pa produkt BA, ker matrik velikosti 2×3 in 2×2 v tem vrstnem redu ni možno zmnožiti. Nadalje, če sta A in B kvadratni matriki iste velikosti, potem obstajata AB in BA. Omenjena produkta nista nujno enaka. Operacija množenja pri kvadratnih matrikah ni komutativna. Na primer, naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opazimo, da pri množenju kvadratnih matrik nastopi zanimiva lastnost, ki se pri realnih številih ne more zgoditi. Obstajata neničelni matriki A, B, za kateri velja $AB = 0$. Računanju s kvadratnimi matrikami bo posvečeno naslednje poglavje 3.2.

Trditev 3.3. *Za množenje matrik velja:*

A $\quad (AB)\,C = A\,(BC)$ *za vse* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$;
$D1$ $(A+B)\,C = AC + BC$ *za vse* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$;
$D2$ $A\,(B+C) = AB + AC$ *za vse* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, C \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$;
H $\quad \lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$ *za vse* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$.

Dokaz. Dokažimo lastnost A, asociativnost množenja matrik A. Naj bodo A, B in C matrike ustreznih velikosti. Potem je $(AB)\,C \in M_{m\times s}(\mathbb{R})$ in velja

$$\begin{aligned} ((AB)\,C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} (a_{il} b_{lk})\, c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{il}\,(b_{lk} c_{kj}) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\,(BC)_{lj} \\ &= (A\,(BC))_{ij}\,. \end{aligned}$$

Dokažimo lastnost $D1$, prvo distributivnost. Naj bodo A, B, C ponovno poljubne matrike ustreznih velikosti. Potem je $(A+B)\,C \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$ in velja

$$\begin{aligned} ((A+B)\,C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC + BC)_{ij}\,. \end{aligned}$$

Distributivnost $D2$ dokažemo podobno. Nazadnje dokažimo še lastnost H, homogenost matričnega množenja glede množenja s skalarji. Naj bosta $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$. Potem lahko zapišemo

$$(\lambda(AB))_{ij} = \lambda(AB)_{ij} = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik})\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda A)_{ik}\, b_{kj} = ((\lambda A)\, B)_{ij}$$

in podobno

$$(\lambda(AB))_{ij} = \lambda(AB)_{ij} = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda B)_{kj} = (A(\lambda B))_{ij}\,.$$

S tem je trditev dokazana. □

Transponiranje matrik

Naj bo A matrika velikosti $m \times n$. *Transponiranka* matrike A je matrika A^T velikosti $n \times m$, katere elementi so $\left(A^T\right)_{ij} = a_{ji}$. To pomeni, da je transponiranje preslikava $^T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$ definirana z

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \mapsto A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zgled 8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Opomba 3. Matriko A^T dobimo tako, da vrstice (stolpce) matrike A po vrsti zapišemo v stolpce (vrstice).

Trditev 3.4. *Transponiranje matrik ima naslednje lastnosti:*
(i) $(A^T)^T = A$ *za vsak* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*;*
(ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ *za vse* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*;*
(iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$ *za vse* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*;*
(iv) $(AB)^T = B^T A^T$ *za vse* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$.

Dokaz. Ker je

$$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = a_{ij},$$

vidimo, da (i) velja. Ker lahko zapišemo

$$((\lambda A)^T)_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda(A^T)_{ij} = (\lambda A^T)_{ij} \quad \text{in}$$
$$((A + B)^T)_{ij} = (A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (A^T + B^T)_{ij},$$

veljata tudi lastnosti (*ii*) in (*iii*). Račun

$$
\begin{aligned}
((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}
\end{aligned}
$$

dokazuje še lastnost (*iv*). □

3.2 Algebra kvadratnih matrik

Z $M_n(\mathbb{R})$ smo označili množico vseh kvadratnih $n \times n$ realnih matrik, kjer je $n \in \mathbb{N}$. V primeru, ko je $n = 1$, $M_1(\mathbb{R})$ identificiramo z $\mathbb{R}$. Na množici $M_n(\mathbb{R})$ je poleg seštevanja matrik:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

in množenja matrik z realnimi skalarji:

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}],$$

dobro definirano tudi množenje matrik:

$$AB = [a_{ij}][b_{ij}] = [\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}].$$

Opomba 1. Naj bo $\mathcal{A}$ množica, na kateri sta definirani notranji operaciji seštevanje $+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ in množenje $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ter zunanja operacija množenje z realnimi skalarji $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Če operacije $+, *, \cdot$ zadoščajo lastnostim $S1$–$S4$ (glej trditev 3.1), $M1$–$M4$ (glej trditev 3.2) in $A, D1, D2, H$ (glej trditev 3.3), pravimo, da je $\mathcal{A}$ *realna algebra*. Kvadratne matrike $M_n(\mathbb{R})$ so tako primer realne algebre.

Matrična algebra $M_n(\mathbb{R})$ je *algebra z enoto*. Obstaja matrika $I \in M_n(\mathbb{R})$, imenovana *identiteta* ali *identična matrika*, za katero velja

$$IA = AI = A \quad \text{za vsak } A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Namreč, identiteta I je matrika velikosti $n \times n$, ki ima po diagonali enice in povsod drugod ničle. To pomeni

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}], \quad \text{kjer } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

označuje tako imenovani *Kronekerjev simbol delta*.

Zgled 1. Identiteta v algebri $M_2(\mathbb{R})$ je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in identiteta v algebri $M_3(\mathbb{R})$ je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tako v primeru 2×2 matrik velja

$$AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A,$$
$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

Definicija. Matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *komutirata*, če velja $AB = BA$.

Zgled 2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem matriki A in B komutirata

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = BA.$$

Medtem ko matriki A in C ne komutirata

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = CA.$$

Opomba 2. Matrična algebra $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, je nekomutativna algebra. V matrični algebri ne velja komutativnost množenja.

V nadaljevanju bomo spoznali nekatere posebne matrike. Označimo z $\mathbb{N}_n$ množico prvih n naravnih števil $\{1, 2, ..., n\}$.

Matrične enote

Za vsak $i, j \in \mathbb{N}_n$ označimo z E_{ij} matriko, pri kateri je $a_{ij} = 1$, vsi ostali elementi pa so enaki 0. Matrika E_{ij} se imenuje *matrična enota* $M_n(\mathbb{R})$. Zakaj ime matrična enota? Vsaka matrika se da enolično zapisati kot linearna kombinacija matričnih enot. Pokažimo to na primeru $n = 2$.

Zgled 3. Matrične enote algebre $M_2(\mathbb{R})$ so

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker velja

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lahko vsako matriko $A \in M_2(\mathbb{R})$ zapišemo v obliki linearne kombinacije

$$\begin{aligned} A &= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}E_{ij}. \end{aligned}$$

Opomba 3. Naj bo $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Potem velja

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Ker množica $M_n(\mathbb{R})$, opremljena s seštevanjem in množenjem s skalarji, zadošča lastnostim $S1$–$S4$ in $M1$–$M4$, je $M_n(\mathbb{R})$ primer realnega vektorskega prostora. Množica matričnih enot $\{E_{ij} | i, j \in \mathbb{N}_n\}$ je primer tako imenovane *standardne baze* vektorskega prostora $M_n(\mathbb{R})$. Ker ima baza n^2 elementov, ima vektorski prostor kvadratnih matrik $M_n(\mathbb{R})$ razsežnost n^2. Zato lahko zapišemo $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Ni težko videti, da za množenje v $M_n(\mathbb{R})$ matričnih enot velja lepo pravilo

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} = \begin{cases} E_{il} & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases}.$$

Zgled 4. Nekateri produkti matričnih enot algebre $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} E_{11}E_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11}, \\ E_{21}E_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{22}, \\ E_{12}E_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Diagonalne, skalarne in trikotne matrike

Matrika $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ je

- *skalarna*, če je oblike $A = \lambda I$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix};$$

- *diagonalna*, če je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- *zgornje trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za $i > j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- *strogo zgornje trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za $i \geq j$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Opomba 4. Vsaka skalarna matrika je tudi diagonalna matrika. Diagonalna in strogo zgornje trikotna matrika je tudi zgornje trikotna matrika. Analogno sta definirani tudi spodnje trikotna in strogo spodnje trikotna matrika. Diagonalna matrika je primer zgornje in spodnje trikotne matrike.

Idempotentne in nilpotentne matrike

Naj bo A kvadratna matrika in m naravno število. Potenca A^m je definirana induktivno $A^1 = A$ in $A^m = A^{m-1} \cdot A$. Po dogovoru A^0 predstavlja identiteto I. Pravimo, da je A

- *idempotentna matrika*, če je $A^2 = A$,

- *nilpotentna matrika*, če je $A^m = 0$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

Zgled 4. Matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sta idempotentni matriki. Velja

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A, \\ B^2 &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = B. \end{aligned}$$

Identiteta I je idempotentna matrika, ker velja $I^2 = I$. Če je matrika A idempotentna matrika, potem je tudi matrika $I - A$ idempotentna:

$$(I - A)(I - A) = I - A - A + A^2 = I - A.$$

Vsaka strogo zgornje trikotna matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je primer nilpotentne matrike, ker je $A^n = 0$. V naslednjem zgledu si to poglejmo v primeru $n = 3$.

Zgled 5. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A^3 = A^2 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in A je nilpotentna matrika.

Kako izračunamo potenco vsote dveh matrik? Na primer

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2, \\ (A + B)^3 &= \left(A^2 + AB + BA + B^2\right)(A + B) \\ &= A^3 + ABA + BA^2 + B^2A + A^2B + AB^2 + BAB + B^3. \end{aligned}$$

Če matriki A in B komutirata, to pomeni $AB = BA$, potem se dani enakosti zelo poenostavita

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2, \\ (A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3. \end{aligned}$$

Kar lahko induktivno posplošimo in dobimo znano binomsko formulo:

Trditev 3.5. *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ komutirajoči matriki in $m \in \mathbb{N}$. Potem velja*

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k. \tag{3.1}$$

Dokaz. Iz vsakega faktorja v produktu

$$\underbrace{(A+B)(A+B)\cdots(A+B)}_{m\text{-krat}}$$

izberemo bodisi A bodisi B. Naj bo $k \in \mathbb{N}_m$. Denimo, da smo k-krat izbrali matriko B in $m-k$-krat matriko A. Ker matriki A in B komutirata, smo dobili produkt $A^{m-k}B^k$. Vseh različnih neurejenih izbir k elementov iz množice z m elementi je

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Zato se produkt $A^{m-k}B^k$ v potenci $(A+B)^m$ pojavi točno $\binom{m}{k}$-krat. □

Zgled 6. Uporabimo formulo (3.1) za izračun potence

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n.$$

Zapišemo

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A + B.$$

Ker je $A = 2I$ skalarna matrika, sta A in B komutirajoči matriki:

$$AB = (2I)\,B = 2B = B\,(2I) = BA.$$

Nadalje, vidimo, da je B nilpotentna matrika, ker je

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zato je tudi $B^k = 0$ za vsak $k \geq 2$ in iz (3.1) sledi

$$\begin{aligned}
(A+B)^n &= A^n + nA^{n-1}B \\
&= (2I)^n + n\,(2I)^{n-1}\,B \\
&= 2^n I + n2^{n-1} IB \\
&= 2^{n-1}\,(2I + nB).
\end{aligned}$$

Torej

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = 2^{n-1}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2^{n-1}\begin{bmatrix} 2 & 3n \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Opomnimo, da bi do rezultata lahko prišli tudi brez uporabe binomskega obrazca. Z izračunom nekaj začetnih potenc bi želeni rezultat lahko uganili. V tem primeru je dano domnevo potrebno še dokazati z matematično indukcijo.

Simetrične in poševno simetrične matrike

Za matriko $A = [a_{ij}]$ smo z $A^T = [a_{ji}]$ označili njeno transponiranko. Transponiranje pri kvadratnih matrikah predstavlja "zrcaljenje" čez glavno diagonalo. Matrika A je

- *simetrična*, če je $A^T = A$, to pomeni $a_{ij} = a_{ji}$ za vse i, j;
- *poševno simetrična*, če je $A^T = -A$ oziroma $a_{ij} = -a_{ji}$ za vse i, j.

Zgled 7. Primera simetrične matrike S in poševno simetrične matrike P velikosti 3×3 sta

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema 3.6. *Če sta A in B (poševno) simetrični matriki, potem je tudi $\lambda A + \mu B$, kjer sta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (poševno) simetrična matrika.*

Dokaz. Denimo, da je $A^T = A$ in $B^T = B$. Potem z uporabo lastnosti iz trditve 3.4 velja

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda A)^T + (\mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$$

in matrika $\lambda A + \mu B$ je simetrična. Dokaz v primeru poševno simetričnih matrik poteka podobno. □

Trditev 3.7. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Potem je A vsota enolično določenih simetrične in poševno simetrične matrike.*

Dokaz. Označimo

$$S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \quad \text{in} \quad P = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Potem je S simetrična in P poševno simetrična matrika. Namreč, upoštevajoč trditev 3.4 lahko zapišemo

$$\begin{aligned} S^T &= \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T + A\right) = S, \\ P^T &= \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T - A\right) = -P. \end{aligned}$$

Ker je

$$S + P = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = A,$$

preostane samo še dokaz enoličnosti danega zapisa. Denimo, da je $A = S_1 + P_1 = S_2 + P_2$, kjer sta S_1, S_2 simetrični matriki in P_1, P_2 poševno simetrični matriki. Po prejšnji lemi je

$$B = S_1 - S_2 = P_2 - P_1$$

hkrati simetrična in poševno simetrična matrika. To pomeni $B = B^T = -B$ in $B = 0$. Edina matrika, ki je hkrati simetrična in poševno simetrična, je ničelna matrika. Torej $S_1 = S_2$, $P_1 = P_2$ in trditev je dokazana. $\square$

Opomba 5. Iz leme 3.6 sledi, da imajo tako simetrične kot poševno simetrične matrike algebre $M_n(\mathbb{R})$ lepo strukturo. Tvorijo namreč vektorska podprostora. Če označimo z U vektorski podprostor vseh simetričnih matrik in z V podprostor vseh poševno simetričnih matrik, potem trditev 3.7 pravi, da sta podprostora $U + V = M_n(\mathbb{R})$ in $U \cap V = 0$. Na podlagi zgleda 7 lahko hitro ugotovimo, da v primeru $n = 3$ velja:

- $\dim U = 6$ in primer baze prostora U sestavljajo matrike
$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}.$$
- $\dim V = 3$ in bazo prostora V tvorijo matrike
$$E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}.$$

Na primer, matriki S in P iz zgleda 7 se z zgoraj omenjenimi matrikami zapišeta v obliki linearne kombinacije

$$\begin{aligned}
&S = E_{11} + 2E_{22} + 3E_{33} + 4(E_{12} + E_{21}) + 5(E_{13} + E_{31}) + 6(E_{23} + E_{32}),\\
&P = (E_{12} - E_{21}) + 2(E_{13} - E_{31}) + 3(E_{23} - E_{32}).
\end{aligned}$$

3.3 Dva primera uporabe matrik

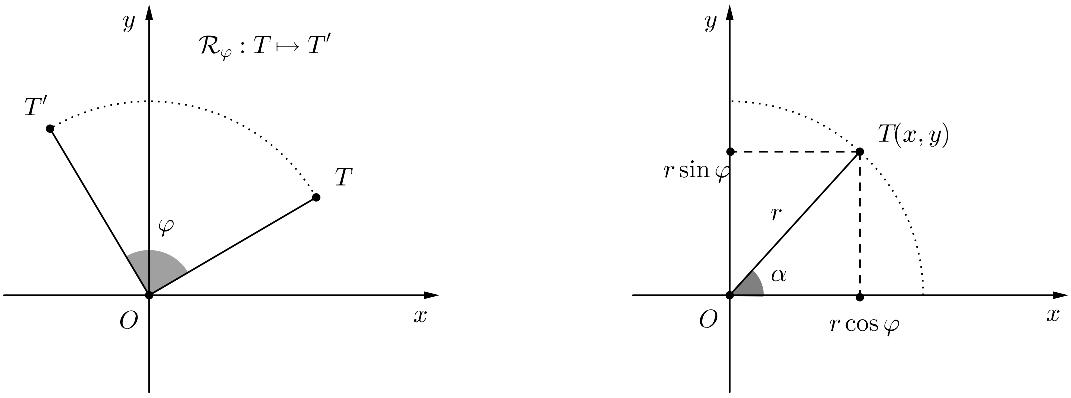
Matrike imajo v matematiki široko uporabo. V tem podpoglavju bomo predstavili dva primera uporabe matrik. Pri linearni algebri matrike služijo za opis tako imenovanih linearnih preslikav. Značilen primer linearne preslikave je zasuk (vrtež ali rotacija) ravnine okoli izhodišča. V prvem primeru bomo z uporabo matrik opisali zasuke ravnine. V drugem primeru bomo spoznali tako imenovane markovske matrike. Z njihovo uporabo se pri verjetnosti rešujejo praktični problemi.

Zasuk ravnine

Naj bo $\mathcal{R}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zasuk ravnine okoli izhodišča za kot φ v pozitivni smeri. Naj bo $T(x, y)$ točka v ravnini. Dana točka je enolično določena z oddaljenostjo od izhodišča $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in kotom α, pri tem velja $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$. Tako dobljeni koordinati α, r se imenujeta polarni koordinati. Glej sliko 3.1, ki prikazuje zasuk ravnine in polarni koordinati točke T.

Označimo s $T'(x', y')$ sliko točke $T(x, y)$ pri zasuku $\mathcal{R}_\varphi$. Točko T identificiramo z vektorjem $\vec{x}$ in podobno točko T' identificiramo z vektorjem $\vec{y}$. Glej sliko 3.2. Vektorje predstavimo v stolpčni obliki in zapišemo:

$$\vec{x} = \vec{r}_T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{y} = \vec{r}_{T'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha + \varphi) \\ r\sin(\alpha + \varphi) \end{bmatrix}.$$



Slika 3.1: Zasuk ravnine $\mathcal{R}_\varphi$

Potem je $\vec{y} = \mathcal{R}_\varphi(\vec{x})$ in z uporabo adicijskega izreka dobimo

$$\begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) \\ r(\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}.$$

To pomeni

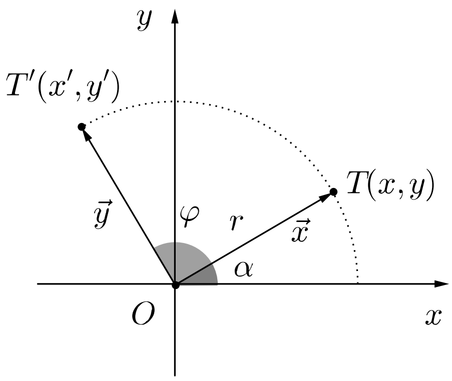
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Če označimo matriko

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

vidimo, da je zasuk $\mathcal{R}_\varphi$ določen kot množenje stolpčnih vektorjev z matriko R_φ:

$$\mathcal{R}_\varphi(\vec{x}) = R_\varphi \vec{x} \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$



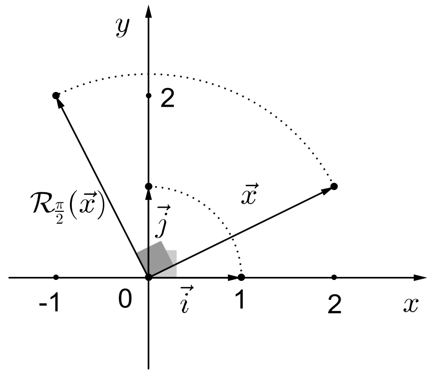
Slika 3.2: Zasuk točke T

Zgled 1. Naj bo $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ zasuk ravnine za kot $\pi/2$. Tedaj danemu zasuku pripada matrika

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Delovanje zasuka lahko opišemo z matričnim zapisom $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = R_{\frac{\pi}{2}}\vec{x}$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Iz slike 3.3 je na primer razvidno, da se točki $(1,0)$ in $(2,1)$ zavrtita v točki $(0,1)$ in $(-1,2)$. To nam pokaže tudi račun:

$$\begin{aligned} \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Slika 3.3: Zasuk za kot $\pi/2$

Opomba 1. Zasuk $\mathcal{R}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je preslikava, ki zadošča

(*i*) $\mathcal{R}_\varphi(x+y) = \mathcal{R}_\varphi(x) + \mathcal{R}_\varphi(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}^2$,

(*ii*) $\mathcal{R}_\varphi(\lambda x) = \lambda \mathcal{R}_\varphi(x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$.

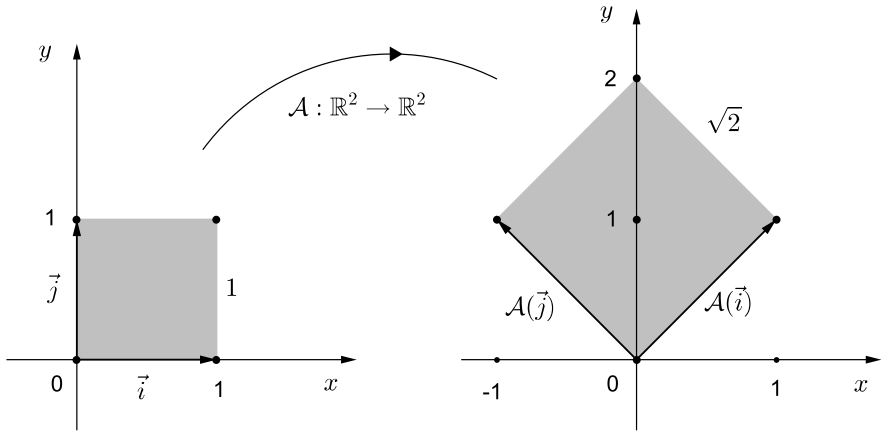
To lahko utemeljimo z geometrijskim razmislekom ali z uporabo matričnega računa:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\varphi(x+y) = R_\varphi(x+y) = R_\varphi x + R_\varphi y = \mathcal{R}_\varphi(x) + \mathcal{R}_\varphi(y), \\ \mathcal{R}_\varphi(\lambda x) = R_\varphi(\lambda x) = \lambda(R_\varphi x) = \lambda \mathcal{R}_\varphi(x) \end{aligned}$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in vse $x, y \in \mathbb{R}^2$. Preslikavi, ki zadošča (*i*) in (*ii*), pravimo *linearna preslikava* vektorskega prostora $\mathbb{R}^2$. Delovanje linearne preslikave $\mathcal{A}$ na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ lahko vedno predstavimo v obliki $\mathcal{A}(x) = Ax$, kjer je A realna matrika velikosti $n \times n$ in x stolpčni vektor.

Zgled 2. Razen zasukov obstajajo v ravnini $\mathbb{R}^2$ še druge linearne preslikave. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s predpisom $\mathcal{A}(x) = Ax$ za vsak $x \in \mathbb{R}^2$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 3.4: Delovanje preslikave $\mathcal{A}$

To pomeni

$$\mathcal{A}(x,y)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\ x+y\end{bmatrix}=(x-y,x+y)\,.$$

Kako deluje $\mathcal{A}$? Preslikajmo kvadrat z oglišči $(0,0)\,,(1,0)\,,(1,1)\,,(0,1)\,.$ Ker je

$$\mathcal{A}(0,0)=(0,0)\,,\ \mathcal{A}(1,0)=(1,1)\,,\ \mathcal{A}(1,1)=(0,2)\,,\ \mathcal{A}(0,1)=(-1,1)\,,$$

se izkaže, da je slika originalnega kvadrata zavrtena za kot $\pi/4$ in raztegnjena za faktor $\sqrt{2}$. Glej sliko 3.4! Dano ugotovitev hitro potrdimo tudi algebraično, ker velja

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\sqrt{2}R_{\frac{\pi}{4}}.$$

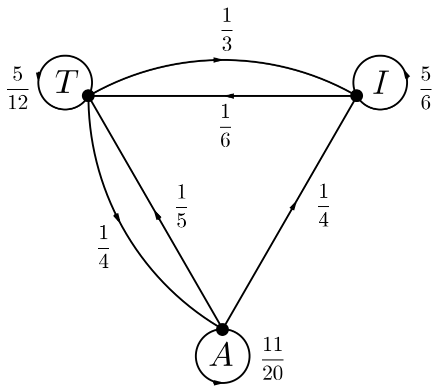
Zato je $\mathcal{A}$ res kompozitum zasuka $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}$ in raztega za faktor $\sqrt{2}$.

Markovske matrike

Matrike služijo za opis praktičnih problemov. Markovske matrike imajo pomembno vlogo pri verjetnosti, ker opisujejo tako imenovane markovske verige. Obravnavajmo primer markovske verige.

Denimo, da imamo opravka z naslednjim idealiziranim primerom. Populacija kitov grbavcev živi v treh oceanih: T – Tihi ocean, A – Atlantski ocean in I – Indijski ocean. Predpostavimo, da se vsako leto delež kitov iz določenega področja preseli v drugo po naslednji shemi, prikazani na sliki 3.5.

Z vrstičnim vektorjem $p_0=[x_0\ y_0\ z_0]$ po vrsti označimo začetno porazdelitev deleža kitov glede na ocean T,A,I. Kako se ta porazdelitev spreminja skozi leta? Kakšno porazdelitev lahko pričakujemo po veliko letih?



Slika 3.5: Povezave med stanji T, A, I

Naj bo $p_n = [x_n \; y_n \; z_n]$ stanje po n-tem letu in $p_{n+1} = [x_{n+1} \; y_{n+1} \; z_{n+1}]$ stanje v letu $n+1$. Tedaj veljajo naslednje zveze

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{5}{12}x_n + \frac{1}{5}y_n + \frac{1}{6}z_n, \\ y_{n+1} &= \frac{1}{4}x_n + \frac{11}{20}y_n, \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{5}{6}z_n, \end{aligned}$$

ki jih lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

To pomeni $p_{n+1} = p_n P$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$, kjer je

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

tako imenovana *matrika prehoda*. Torej, porazdelitev po prvem letu je enaka $p_1 = p_0 P$, porazdelitev po drugem letu $p_2 = p_1 P = p_0 P^2$ in porazdelitev po n letih je $p_n = p_{n-1}P = p_{n-2}P^2 = \cdots = p_0 P^n$. Vidimo, da je potrebno v splošnem izračunati potenco P^n. Samo računanje velikih potenc matrike presega naše zmožnosti. Zato kot zanimivost omenimo, da je

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \frac{1}{79} \begin{bmatrix} 18 & 10 & 51 \\ 18 & 10 & 51 \\ 18 & 10 & 51 \end{bmatrix}.$$

Izkaže se, da se neodvisno od začetne porazdelitve p_0 porazdelitev po veliko letih stabilizira pri vektorju

$$p = \begin{bmatrix} \frac{18}{79} & \frac{10}{79} & \frac{51}{79} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

To pomeni $\lim\limits_{n\to\infty} p_0 P^n = p$. Pri tem opazimo, da velja

$$pP = \begin{bmatrix} \frac{18}{79} & \frac{10}{79} & \frac{51}{79} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{79} & \frac{10}{79} & \frac{51}{79} \end{bmatrix} = p.$$

Porazdelitev p, določena z (3.2), je tako imenovana stacionarna porazdelitev. Če je porazdelitev deleža kitov glede na ocean T, A, I enaka p, potem se ta porazdelitev z leti ne spreminja.

Opomba 2. Matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je *markovska matrika* ali *stohastična matrika*, če velja

(i) njeni elementi so nenegativni, $a_{ij} \geq 0$ za vse $i, j \in \mathbb{N}_n$,

(ii) vsota vsake vrstice je enaka 1, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ za vsak $i \in \mathbb{N}_n$.

Vidimo, da je naša matrika prehoda P markovska matrika.

3.4 Obrnljivost matrik

V tem podpoglavju bomo definirali, kdaj je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva in kaj je obratna vrednost ali inverz obrnljive matrike. Prav tako bomo karakterizirali obrnljive 2×2 matrike.

Začnimo z motivacijo. Za vsako neničelno realno število a obstaja tako število b, imenovano obratna vrednost ali inverz, da je $ab = 1$. Inverz označimo z a^{-1} in je enak številu $1/a$. Zato pravimo, da je vsako neničelno realno število obrnljivo. Podobno velja tudi za kompleksna števila. Če je $z = x + yi$ neničelno kompleksno število, potem je inverz

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - yi).$$

V primeru celih števil $\mathbb{Z}$ sta obrnljivi samo števili 1 in -1, ostala cela števila v $\mathbb{Z}$ niso obrnljiva. Tudi v algebri kvadratnih matrik definiramo:

Definicija. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Tedaj matriko $B \in M_n(\mathbb{R})$, za katero velja

$$AB = I = BA,$$

imenujemo *inverzna matrika* matrike A. Če obstaja inverzna matrika, pravimo, da je matrika A *obrnljiva* ali *regularna* ali *nesingularna*.

Trditev 3.8. *Če obstaja inverzna matrika matrike A, je ta določena enolično.*

Dokaz. Denimo, da obstajata matriki B in C, ki zadoščata

$$AB = I = BA,$$
$$AC = I = CA.$$

Potem velja $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. $\square$

V nadaljevanju bomo inverzno matriko matrike A označevali z A^{-1}. Ker je $M_n(\mathbb{R})$ nekomutativna algebra, smo formalno v definiciji inverzne matrike zahtevali oba pogoja $AB = I$ in $BA = I$. Vendar se izkaže, da zadošča zahtevati samo en pogoj ali $AB = I$ ali $BA = I$. To sledi iz izreka 3.9, katerega dokaz bomo na tem mestu izpustili. Veljavnost izreka bomo utemeljili pozneje, ko razvijemo orodja za računanje inverzne matrike (glej poglavje 4.6).

Izrek 3.9. *Če za matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ velja $AB = I$, potem je tudi $BA = I$.*

Trditev 3.10. *Matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sta obrnljivi natanko tedaj, ko je obrnljiv njun produkt AB in velja*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dokaz. Predpostavimo, da sta matriki A in B obrnljivi. Zato obstajata matriki A^{-1} in B^{-1}. Naj bo $C = B^{-1}A^{-1}$. Potem velja

$$\begin{aligned}(AB)C &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,\\ C(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

in AB je obrnljiva matrika in velja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Predpostavimo nasprotno, da je AB obrnljiva matrika in s C označimo njeno inverzno matriko. Potem velja

$$\begin{aligned}(AB)C = I \quad &\text{oz.} \quad A(BC) = I,\\ C(AB) = I \quad &\text{oz.} \quad (CA)B = I.\end{aligned}$$

Z uporabo izreka 3.9 lahko zaključimo, da sta A in B obrnljivi matriki. Velja $A^{-1} = BC$ in $B^{-1} = CA$. $\square$

Problem. Kdaj je matrika A obrnljiva? Kako izračunamo inverzno matriko?

Za motivacijo bomo obravnavali problem v primeru $n = 2$. V splošnem bomo odgovora na zastavljeni vprašanji podali kasneje, ko razvijemo potrebna orodja (glej poglavji 4.6 in 5.7). Začnimo z zgledom, v katerem obravnavamo obrnljivost treh matrik iz algebre $M_2(\mathbb{R})$.

Zgled. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

1. Matrika A je obrnljiva in inverzna matrika je

   $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Velja namreč

   $$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & -21+21 \\ 10-10 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Matrika B ni obrnljiva. Denimo, da obstaja matrika C z lastnostjo $BC = I$. Potem lahko zapišemo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

in dobimo protislovje $1 = a + c = 0$. Torej taka matrika C ne obstaja.

3. Ali je matrika C obrnljiva? V prejšnjem podpoglavju smo videli, da nam matrika

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

opiše zasuk ravnine okoli izhodišča za kot φ, torej predstavlja preslikavo $\mathcal{R}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zasuk $\mathcal{R}_\varphi$ je bijektivna preslikava, saj obstaja inverzna preslikava $\mathcal{R}_\varphi^{-1} = \mathcal{R}_{-\varphi}$, da je

$$\mathcal{R}_\varphi^{-1} \circ \mathcal{R}_\varphi = \mathcal{I};$$

to pomeni $\mathcal{R}_\varphi^{-1}(\mathcal{R}_\varphi(x)) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}^2$. Obratni zasuk lahko identificiramo z matriko

$$R_{-\varphi} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Zato ni presenečenje, da je matrika $C = R_\varphi$ obrnljiva in inverzna matrika je enaka $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$:

$$R_\varphi R_{-\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $A \in M_2(\mathbb{R})$. Rešimo matrično enačbo $AX = I$; torej

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dano enačbo preuredimo v obliko

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opravka imamo z dvema sistemoma linearnih enačb z dvema neznankama:

$$(i): \begin{array}{l} ax_1 + bx_2 = 1 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{array} \quad \text{in} \quad (ii): \begin{array}{l} ay_1 + by_2 = 0 \\ cy_1 + dy_2 = 1 \end{array}.$$

Rešimo sistem (i). Če prvo enačbo pomnožimo z d in drugo enačbo pomnožimo z $-b$ ter ju seštejemo, dobimo

$$(ad - bc)\, x_1 = d.$$

Če pa prvo enačbo pomnožimo z $-c$ in drugo z a ter ju seštejemo, dobimo

$$(ad-bc)\,x_2=-c.$$

Sistem enačb (i) je rešljiv natanko tedaj, ko je $ad-bc\neq 0$. Rešitev je

$$x_1=\frac{d}{ad-bc}\quad\text{in}\quad x_2=\frac{-c}{ad-bc}.$$

Podobno postopamo pri reševanju sistema (ii). Tudi ta sistem je rešljiv natanko tedaj, ko je $ad-bc\neq 0$ in rešitev je

$$y_1=\frac{-b}{ad-bc}\quad\text{in}\quad y_2=\frac{a}{ad-bc}.$$

Vidimo, da je iskana inverzna matrika enaka

$$X=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

S tem je dokazana trditev:

Trditev 3.11. *Matrika $A\in M_2(\mathbb{R})$ je obrnljiva natanko tedaj, ko je $ad-bc\neq 0$. Pri tem je*

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

Opomba 1. Vidimo, da je 2×2 matrika A obrnljiva natanko tedaj, ko je njena *determinanta*

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0.$$

V poglavju 5 bomo ta rezultat posplošili na splošne $n\times n$ matrike. Definirali bomo determinanto reda n in poiskali obrazec za inverzno matriko A^{-1}.

Opomba 2. Po drugi strani se izkaže, da je 2×2 matrika A obrnljiva natanko tedaj, ko je enolično rešljiv sistem linearnih enačb $Ax=b$, kjer sta $x,b\in\mathbb{R}^2$. To pomeni

$$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}\quad\text{oz.}\quad \begin{array}{c} ax_1+bx_2=b_1\\ cx_1+dx_2=b_2\end{array},$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki

$$x_1\begin{bmatrix} a\\ c\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} b\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}\quad\text{oz.}\quad x_1A^1+x_2A^2=b.$$

Torej se vsak vektor $b\in\mathbb{R}^2$ enolično izraža kot linearna kombinacija vektorjev $A^1,A^2\in\mathbb{R}^2$, ki sta stolpca matrike A. Zato sta vektorja A^1,A^2 linearno neodvisna in tvorita bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^2$. V poglavju 4, ki obravnava sisteme linearnih enačb, bomo ta rezultat posplošili. Videli bomo, da je matrika obrnljiva natanko tedaj, ko so njeni stolpci $A^1,A^2,...,A^n$ ali vrstice $A_1,A_2,...,A_n$ linearno neodvisni vektorji.

Če združimo vse omenjeno, lahko zaključimo to poglavje s karakterizacijo obrnljivih 2×2 matrik:

Izrek 3.12. *Za matriko $A \in M_2(\mathbb{R})$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) *A je obrnljiva matrika;*

(ii) *determinanta matrike A je različna od 0;*

(iii) *stolpca A^1, A^2 matrike A sta linearno neodvisna vektorja;*

(iv) *sistem linearnih enačb $Ax = b$ je enolično rešljiv za vsak $b \in \mathbb{R}^2$.*

Poglavje 4

Sistemi linearnih enačb

4.1 Definicija in uvodni primeri

Linearna enačba nad realnimi števili z n neznankami $x_1, x_2, ..., x_n$ je enačba oblike

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

kjer so $a_1, a_2, ..., a_n, b$ dana realna števila. Rešitev te enačbe je vsak vektor (točka) $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$, za katerega velja $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$. Množica vseh rešitev je

$$R = \{(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n | a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zgled 1. Rešitev linearne enačbe $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$ je množica

$$\pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y + z = 6\right\},$$

ki geometrijsko predstavlja ravnino v $\mathbb{R}^3$. Dana ravnina poteka skozi točke $A\,(3, 0, 0)$, $B\,(0, 2, 0)$, $C\,(0, 0, 6)$.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1, x_2, ..., x_n$ je družina linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Rešitev sistema linearnih enačb (4.1) je vsak vektor $s \in \mathbb{R}^n$, ki reši vsako od danih enačb. Naj bo R_i množica rešitev i-te linearne enačbe. Potem je rešitev danega sistema linearnih enačb

$$R = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_m \subseteq \mathbb{R}^n.$$

V primeru $R \neq \emptyset$, pravimo, da je sistem linearnih enačb rešljiv ali konsistenten, sicer je sistem protisloven oz. nekonsistenten.

Zgled 2. Dani so trije sistemi linearnih enačb z dvema neznankama:

$$(i)\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{c} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+y=1 \end{array}\right. .$$

Sistem linearnih enačb (i) je rešljiv in ima eno samo rešitev $T\,(2,1)\in\mathbb{R}^2$. Premici, določeni z enačbama (i), se sekata v točki T. Sistem linearnih enačb (ii) je rešljiv. Rešitev je neskončno mnogo in v $\mathbb{R}^2$ predstavljajo premico $p=\{(t,3-t)\,|t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$. Sistem linearnih enačb (iii) je protisloven. Premici, določeni z enačbama (iii), se ne sekata.

Opomba 1. Pri reševanju sistema linearnih enačb vedno nastopi ena od možnosti:
(i) sistem je enolično rešljiv;
(ii) sistem je rešljiv in ima neskončno rešitev;
(iii) sistem je protisloven.

V tem poglavju nas bo posebej zanimalo, kako rešujemo sisteme linearnih enačb, kakšna je algebraična struktura množice rešitev in primeri uporabe. Pomembno vlogo pri študiju sistemov linearnih enačb imajo matrike. Sistem linearnih enačb (4.1) lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

in krajše predstavimo kot

$$Ax=b, \qquad A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right),\ x\in\mathbb{R}^n,\ b\in\mathbb{R}^m.$$

Pri tem je A matrika sistema, $x\in\mathbb{R}^n$ stolpčni vektor neznank in $b\in\mathbb{R}^m$ stolpčni vektor konstant. Z

$$[A|b]=\begin{bmatrix}A^1\ A^2\ \cdots\ A^n\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

označimo t. i. *razširjeno matriko* sistema linearnih enačb.

Kako rešimo sistem linearnih enačb? Linearne sisteme najbolj elegantno rešujemo z Gaussovo metodo. Gaussovo metodo bomo neformalno spoznali na spodnjem delovnem zgledu. Sistem linearnih enačb ne spremeni rešitev, če

- eno enačbo pomnožimo z neničelnim skalarjem;
- eno enačbo, pomnoženo s skalarjem, prištejemo k drugi enačbi;

- zamenjamo vrstni red (dveh) enačb.

Z omenjenimi koraki postopoma iz sistema linearnih enačb odstranjujemo posamezne neznanke. Za matrični zapis delovnega zgleda vpeljemo še t. i. *elementarne vrstične operacije*, ki ustrezajo zgornjim postopkom:

- eno vrstico matrike pomnožimo z neničelnim skalarjem;
- eno vrstico matrike, pomnoženo s skalarjem, prištejemo k drugi vrstici;
- zamenjamo med seboj dve vrstici matrike.

Dokazali bomo: če v razširjeni matriki sistema linearnih enačb uporabimo elementarno vrstično operacijo, se rešitve sistema ne spremenijo.

Delovni zgled. Poiščimo presek danih treh ravnin:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 - x_3 &=& 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 &=& 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]. \tag{4.2}$$

Zamenjamo prvo enačbo z drugo in nato drugo s tretjo in dobimo

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 &=& 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &=& 8 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right]. \tag{4.3}$$

V razširjeni matriki sistema (4.2) smo tako zamenjali prvo in drugo vrstico in nato drugo in tretjo. V (4.3) iz druge in tretje enačbe odstranimo prvo spremenljivko x_1. Tako prvo enačbo, pomnoženo z -1, najprej prištejmo k drugi enačbi in nato jo, pomnoženo z -3, prištejmo še k tretji enačbi. Dobimo

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 &=& 4 \\ 2x_2 - 2x_3 &=& -2 \\ 4x_2 - 4x_3 &=& -4 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right]. \tag{4.4}$$

V razširjeni matriki sistema (4.3) smo dejansko prvo vrstico, pomnoženo z -1, prišteli k drugi, pomnoženo z -3, pa prišteli k tretji vrstici. Vidimo, da je tretja enačba dvakratnik druge, zato jo lahko izpustimo. Če pomnožimo drugo enačbo z $1/2$, dobimo

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 &=& 4 \\ x_2 - x_3 &=& -1 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{4.5}$$

Torej smo v razširjeni matriki sistema (4.4) drugo vrstico pomnožili z -2 in jo prišteli k tretji vrstici in dobili ničelno vrstico ter drugo vrstico pomnožili z $1/2$. Nazadnje v (4.5) prištejemo drugo enačbo k prvi oz. v razširjeni matriki prištejemo drugo vrstico k prvi. Dobimo

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 &=& 3 \\ x_2 - x_3 &=& -1 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]. \tag{4.6}$$

Vidimo, da je $x_1 = 3$. Spremenljivki x_2 in x_3 pa povezuje enačba $x_2 - x_3 = -1$. Zato izberemo na primer spremenljivko x_3 za tako imenovano prosto (nedoločeno) spremenljivko, to pomeni $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Potem je $x_2 = -1 + x_3 = -1 + t$. Ker je ena spremenljivka prosta, dobimo enoparametrično družino rešitev $p = \{(3, -1+t, t) \,|t \in \mathbb{R}\}$, ki geometrijsko predstavlja premico. Premica p je določena s točko $A\,(3, -1, 0)$ in vektorjem $\vec{p} = \vec{j} + \vec{k}$.

Prikazanemu postopku v delovnem zgledu, kjer na razširjeni matriki uporabljamo elementarne vrstične operacije, rečemo *Gauss-Jordanova eliminacija.* Matrika, ki jo dobimo na koncu Gaussove eliminacije, je *vrstična kanonična forma.* To pomeni, da ima matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

vrstično kanonično formo

$$\mathrm{VKF}\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opomba 2. Črtkano črto v matriki $[A|b]$ uporabljamo samo, ko želimo poudariti, da imamo opravka z reševanjem sistema linearnih enačb.

4.2 Elementarne matrike

V tem podpoglavju bomo definirali elementarne vrstične operacije, elementarne matrike in matrično vrstično kanonično formo. Naj bo $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ in z $[A_1 A_2 ... A_m]$ označimo vrstično sestavo matrike A.

Definicija. Trije tipi elementarnih vrstičnih operacij na matrikah so:

$(v1)$ i-to vrstico A_i pomnožimo z neničelnim skalarjem λ, natančneje $v_i(\lambda)$:

$$[A_1 \cdots A_i \cdots A_m] \overset{v_i(\lambda)}{\mapsto} [A_1 \cdots \lambda A_i \cdots A_m]\,;$$

$(v2)$ i-to vrstico A_i, pomnoženo z λ, prištejemo k j-ti vrstici, natančneje $v_{ij}(\lambda)$:

$$[A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_m] \overset{v_{ij}(\lambda)}{\mapsto} [A_1 \cdots A_i \cdots \lambda A_i + A_j \cdots A_m]\,;$$

$(v3)$ zamenjamo i-to in j-to vrstico matrike A, natančneje v_{ij}:

$$[A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_m] \overset{v_{ij}}{\mapsto} [A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_m]\,.$$

Naj bo $I \in M_m(\mathbb{R})$ identična matrika. Elementarne matrike so tiste matrike, ki jih iz identitete I dobimo z uporabo elementarnih vrstičnih operacij. Če na matriki I uporabimo operacijo $(v1)$, i-to vrstico matrike I pomnožimo z $\lambda \neq 0$, dobimo *elementarno matriko prvega tipa*:

$$I \overset{v_i(\lambda)}{\mapsto} E_i(\lambda) \quad \text{in velja} \quad E_i(\lambda) = E_{11} + \cdots + \lambda E_{ii} + \cdots + E_{mm}.$$

Če uporabimo operacijo $(v2)$, i-to vrstico matrike I, pomnoženo z $\lambda \neq 0$, prištejemo k j-ti vrstici, dobimo *elementarno matriko drugega tipa*:

$$I \overset{v_{ij}(\lambda)}{\mapsto} E_{ij}(\lambda) \quad \text{in velja} \quad E_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ji}.$$

Če uporabimo operacijo $(v3)$, zamenjamo i-to in j-to vrstico matrike I, dobimo *elementarno matriko tretjega tipa*:

$$I \overset{v_{ij}}{\mapsto} P_{ij} \quad \text{in velja} \quad P_{ij} = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k \neq i,j} E_{kk}.$$

Zgled 1. Naj bo $m = 3$. Elementarne matrike omenjenih treh tipov so na primer

$$E_2(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{13}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elementarne vrstične operacije na matrikah lahko predstavimo kot množenje s pripadajočimi elementarnimi matrikami z leve strani. Velja trditev:

Trditev 4.1. *Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ in A' matrika, dobljena iz A z uporabo elementarnih vrstičnih operacij $(v1)$–$(v3)$. Potem velja:*
(i) $A' = [A_1 ... \lambda A_i ... A_m] = E_i(\lambda) A$,
(ii) $A' = [A_1 ... A_i ... \lambda A_i + A_j ... A_m] = E_{ij}(\lambda) A$,
(iii) $A' = [A_1 ... A_j ... A_i ... A_m] = P_{ij} A$.

Dokaz trditve je rutinski in ga izpustimo, trditev utemeljimo z zgledom.

Zgled 2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Potem nam produkt

$$E_2(6) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 6b_1 & 6b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

predstavlja vrstično operacijo $(v1)$, kjer drugo vrstico matrike A pomnožimo s 6. Produkt

$$E_{13}(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ 3a_1 + c_1 & 3a_2 + c_2 \end{bmatrix}$$

je delovanje vrstične operacije ($v2$), kjer prvo vrstico matrike A, pomnoženo s 3, prištejemo k tretji vrstici. Nazadnje, produkt

$$P_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

opiše vrstično operacijo ($v3$), kjer smo v A zamenjali drugo in tretjo vrstico.

Trditev 4.2. *Elementarne matrike so obrnljive. Inverzna matrika elementarne matrike je istega tipa.*

Dokaz. Elementarna matrika prvega tipa $E_i(\lambda)$ ima inverzno matriko $E_i(1/\lambda)$, ki predstavlja elementarno vrstično operacijo $v_i(1/\lambda)$, i-to vrstico matrike pomnoži z $1/\lambda$. Torej velja

$$I \overset{v_i(\lambda)}{\mapsto} E_i(\lambda) \overset{v_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\mapsto} I \quad \text{ali} \quad E_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) E_i(\lambda) = I.$$

Elementarna matrika drugega tipa $E_{ij}(\lambda)$ ima inverz $E_{ij}(-\lambda)$ in inverzna matrika predstavlja vrstično operacijo $v_{ij}(-\lambda)$, ki i-to vrstico matrike, pomnoženo z $-\lambda$, prišteje k j-ti vrstici. Zapišemo lahko

$$I \overset{v_{ij}(\lambda)}{\mapsto} E_{ij}(\lambda) \overset{v_{ij}(-\lambda)}{\mapsto} I \quad \text{ali} \quad E_{ij}(-\lambda) E_{ij}(\lambda) = I.$$

Elementarna matrika tretjega tipa P_{ij} je sama sebi inverzna matrika, namreč P_{ij} predstavlja zamenjavo i-te in j-te vrstice. Zato velja

$$I \overset{v_{ij}}{\mapsto} P_{ij} \overset{v_{ij}}{\mapsto} I \quad \text{ali} \quad P_{ij}P_{ij} = P_{ij}^2 = I$$

in trditev je dokazana. □

Izrek 4.3. *Dan je sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer je $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Naj bo $P \in M_m(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika in $A' = PA$ ter $b' = Pb$. Potem imata sistema $Ax = b$ in $A'x = b'$ iste rešitve.*

Dokaz. Naj bo x rešitev sistema linearnih enačb $Ax = b$. Če dani sistem z leve strani pomnožimo z matriko P, vidimo, da je x tudi rešitev sistema

$$PAx = Pb \quad \text{oz.} \quad A'x = b'.$$

Predpostavimo obratno, da je x rešitev sistema $A'x = b'$. Ker je P obrnljiva matrika, obstaja inverzna matrika P^{-1}. Če z dano matriko z leve strani pomnožimo enačbo $A'x = b'$, dobimo

$$\begin{aligned} P^{-1}A'x &= P^{-1}b' \\ P^{-1}PAx &= P^{-1}Pb \\ Ax &= b. \end{aligned}$$

Torej x reši tudi sistem linearnih enačb $Ax = b$. □

Za sistema linearnih enačb $Ax = b$ in $A'x = b'$, ki imata iste rešitve, pravimo, da sta *ekvivalentna.* Z razširjeno matriko sistema to zapišemo v obliki $[A|b] \sim [A'|b']$.

Posledica 4.4. *Naj bo $[A|b]$ razširjena matrika sistema $Ax = b$. Denimo, da smo matriko $[A'|b']$ dobili iz matrike $[A|b]$ z uporabo elementarnih vrstičnih operacij (v1)–(v3). Tedaj sta sistema linearnih enačb $Ax = b$ in $A'x = b'$ ekvivalentna.*

Dokaz. Sistem linearnih enačb $Ax = b$ predstavimo z razširjeno matriko $[A|b]$. Matriko $[A'|b']$ smo dobili z zaporedjem elementarnih vrstičnih operacij iz matrike $[A|b]$ in po vrsti označimo pripadajoče zaporedje elementarnih matrik $P_1, P_2, ..., P_k$. Elementarne matrike so obrnljive, zato je po trditvi 3.10 obrnljiva tudi matrika $P = P_k P_{k-1} ... P_2 P_1$. Ker je

$$P\,[A|b] = P_k P_{k-1} ... P_2 P_1\,[A|b] = [A'|b']\,,$$

po izreku 4.3 rešitve sistemov linearnih enačb $Ax = b$ in $A'x = b'$ sovpadajo. □

Zaključimo to poglavje z vpeljavo pojma vrstična kanonična forma matrike A. Vsako matriko $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ lahko z uporabo elementarnih vrstičnih operacij preoblikujemo v obliko, ki se imenuje *vrstična kanonična forma* matrike A (oznaka $\mathrm{VKF}\,A$) in ima naslednje lastnosti:

1. *V vsaki neničelni vrstici matrike je prvi neničelni element z leve, ki se imenuje **pivot**, enak 1.*
2. *Če je i-ta vrstica matrike ničelna, potem so ničelne tudi vse naslednje vrstice.*
3. *Pivot v vrstici $i+1$ je bolj desno kot pivot v i-ti vrstici.*
4. *Pivot je edini neničelni element v svojem stolpcu.*

Zgled 3. Matriki

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

sta zapisani v vrstični kanonični formi. Matrika $A \in M_{5\times 6}(\mathbb{R})$ ima 3 pivote: $a_{11} = 1$, $a_{23} = 1$ in $a_{35} = 1$. Identiteta I algebre $M_5(\mathbb{R})$ ima 5 pivotov, pivoti so diagonalni elementi.

Na delovnem zgledu si oglejmo algoritem, ki matriko preoblikuje v vrstično kanonično formo. Dani algoritem se imenuje *Gauss-Jordanova eliminacija*.

Delovni zgled. Poiščimo vrstično kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo naslednje zaporedje vrstičnih operacij:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{v_{13}}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{v_{12}(-2)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{v_{23}(1),v_2(-1/2)}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \overset{v_{21}(2),v_3(-1)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{v_{32}(-2),v_{31}(-9)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rezultat tega postopka

$$\operatorname{VKF} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Algoritem za iskanje VKF: Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- Postavi $i = 1, j = 1$.
- *Korak 1:*
  - Če je $a_{ij} = 0$ in v j-tem stolpcu obstaja element $a_{kj} \neq 0$ v vrstici z indeksom $k > i$, uporabi vrstično operacijo v_{ik}, da bo novi $a_{ij} \neq 0$.
  - Uporabi vrstično operacijo $v_i(1/a_{ij})$, da bo novi element $a_{ij} = 1$ pivot.
  - Za vsak $k > i$ uporabi vrstično operacijo $v_{ik}(-a_{kj})$, da bo novi element $a_{kj} = 0$.
- Izberi $i + 1$ za nov i (premakni se v novo vrstico) in določi novi j, da bo
  - $a_{kl} = 0$ za vsak $k \geq i + 1$ in $l < j$,
  - $a_{kj} \neq 0$ za neki $k \geq i + 1$.
  - Če tak k obstaja, potem ponovi korak 1.
- *Korak 2:* Vrstice s pivoti ustrezno pomnoži in prištej k predhodnim vrsticam, da bo pivot edini neničelni element v svojem stolpcu.

Opomba. Matriki A in B iz množice $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sta *vrstično ekvivalentni*, označimo $A \sim B$, če lahko matriko B dobimo iz matrike A z zaporedjem elementarnih vrstičnih operacij. Z drugimi besedami, $A \sim B$, če obstaja tako zaporedje elementarnih matrik $P_1, P_2, ..., P_k$, da je $B = P_k P_{k-1} ... P_2 P_1 A$. Ni težko preveriti, da je relacija $\sim$ ekvivalenčna relacija; to pomeni
(*i*) $A \sim A$ (refleksivnost),
(*ii*) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (simetričnost),
(*iii*) $A \sim B \ \wedge\ B \sim C \ \Rightarrow\ A \sim C$ (tranzitivnost).

Matrike, ki imajo obliko VKF, so dejansko predstavniki ekvivalenčnih razredov pri dani relaciji. Hitro vidimo, da velja $A \sim B$ natanko tedaj, ko je $\mathrm{VKF}\, A = \mathrm{VKF}\, B$.

Problem. Ugotovi, katere matrike iz algebre $M_n(\mathbb{R})$ so vrstično ekvivalentne identiteti I? Iščemo torej ekvivalenčni razred relacije $\sim$, katerega predstavnik je identiteta $[I] = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{VKF}\, A = I\}$. Odgovor na zastavljeno vprašanje bralec najde v izreku 4.13.

4.3 Rang matrike

V tem podpoglavju bomo definirali zelo uporaben pojem pri matrikah, ki je povezan s številom neničelnih vrstic v vrstični kanonični formi dane matrike in se imenuje rang matrike. Prav tako je rang uporaben pri vektorjih v $\mathbb{R}^n$ za določitev dimenzij vektorskih podprostorov.

Naj ima matrika $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ vrstično sestavo $A = [A_1 A_2 ... A_m]$. Vrstice $A_1, A_2, ..., A_m$ so vektorji, ki v $\mathbb{R}^n$ generirajo vektorski podprostor $\mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\}$.

Definicija. Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Rang* matrike A, ki ga označimo z $\mathrm{rang}\, A$, je enak razsežnosti vektorskega prostora $\mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\}$.

Neposredno iz definicije sledi:

- Ker je $\mathrm{rang}\, A = \dim \mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\}$, je rang matrike A enak številu linearno neodvisnih vrstic matrike A. Namreč, dimenzija prostora je enaka moči baze tega prostora. Bazni vektorji so linearno neodvisni vektorji, ki tvorijo ogrodje danega prostora.

- Velja ocena $0 \leq \mathrm{rang}\, A \leq \min\{m, n\}$. Linearna lupina $V = \mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Zato je dimenzija prostora V omejena z $n = \dim \mathbb{R}^n$. Po drugi strani pa lahko imamo med $A_1, A_2, ..., A_m$ največ m linearno neodvisnih vektorjev, zato je $\dim V \leq m$.

Opomba 1. V definiciji smo dejansko definirali *vrstični rang* matrike A. Lahko bi definirali tudi *stolpčni rang* matrike A kot razsežnost podprostora $\mathcal{L}\{A^1, A^2, ..., A^n\}$, ki ga v $\mathbb{R}^m$ generirajo stolpci matrike A. V nadaljevanju bomo dokazali, da vrstični in stolpčni rang sovpadata.

Zgled 1. Naj bo $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Potem je $\mathrm{rang}\, A \in \{0, 1, 2, 3\}$. Za matrike

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

velja, da je $\operatorname{rang} A_1 = 0$, $\operatorname{rang} A_2 = 1$, $\operatorname{rang} A_3 = 2$ in $\operatorname{rang} A_4 = 3$. Matrika A_1 nima linearno neodvisne vrstice. Pri matriki A_2 je vsaka vrstica kolinearna z vektorjem $(1,1,1)$. Matrika A_2 ima dve linearno neodvisni vrstici, npr. $(1,0,1),(0,1,1)$. Podprostor, ki ga generirajo vrstice matrike A_4, je enak celemu prostoru $\mathbb{R}^3$.

Podobno, kot so definirane elementarne vrstične operacije, lahko definiramo tudi elementarne stolpčne operacije, in sicer:
($s1$) i-ti stolpec matrike pomnožimo z neničelnim skalarjem λ, $s_i(\lambda)$;
($s2$) i-ti stolpec matrike, pomnožen z $\lambda \neq 0$, prištejemo k j-temu stolpcu, $s_{ij}(\lambda)$;
($s3$) zamenjamo i-ti in j-ti stolpec matrike A, s_{ij}.

Izrek 4.5. *Elementarne operacije* ($v1$)–($v3$) *in* ($s1$)–($s3$) *ne spremenijo niti ranga po vrsticah niti ranga po stolpcih.*

Dokaz. Dokazali bomo, da operacije ($v1$)–($v3$) ne spremenijo ranga po vrsticah in ne spremenijo ranga po stolpcih. Dokaz za operacije ($s1$)–($s3$) je podoben.

Vrstični rang: Naj bo $A = [A_1 A_2 ... A_m]$ vrstična sestava matrike. Dokažimo, da vrstične operacije ne spremenijo podprostora $V = \mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Potem se ohranja tudi dimenzija tega prostora in s tem vrstični rang matrike.

($v1$) Brez izgube za splošnost pomnožimo prvo vrstico matrike A s skalarjem $\lambda \neq 0$ in označimo $U = \mathcal{L}\{\lambda A_1, A_2, ..., A_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ker lahko zapišemo

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda}(\lambda A_1) + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m, \end{aligned}$$

vidimo, da je $x \in V$ natanko tedaj, ko je $x \in U$. Torej je $V = U$.

($v2$) Brez izgube za splošnost prištejmo prvo vrstico matrike A, pomnoženo z $\lambda \neq 0$, k drugi vrstici. Naj bo $B_2 = A_2 + \lambda A_1$ in označimo z $U = \mathcal{L}\{A_1, B_2, ..., A_m\}$ podprostor v $\mathbb{R}^n$, ki ga generirajo nove vrstice. Ker lahko zapišemo

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 \lambda) A_1 + \lambda_2 (A_2 + \lambda A_1) + \cdots + \lambda_m A_m \\ &= \lambda' A_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_m A_m, \end{aligned}$$

vidimo, da je $x \in V$ natanko tedaj, ko je $x \in U$. Zato velja $V = U$.

($v3$) Zamenjava vrstnega reda vektorjev v seznamu $(A_1, A_2, ..., A_m)$ seveda ne spremeni podprostora $\mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\}$.

Stolpčni rang: Naj bo $\dim \mathcal{L}\{A^1, A^2, ..., A^n\} = k$. Potem imamo k stolpcev, ki so linearno neodvisni in baza tega prostora. Predpostaviti smemo, da so to stolpci $A^1, A^2, ..., A^k$. Sicer zamenjamo vrstni red stolpcev. Če uporabimo vrstično operacijo, dobimo nove stolpce $B^1, B^2, ..., B^k$. Dokazali bomo, da so tudi ti stolpci linearno neodvisni. To pomeni, da se pri uporabi vrstične operacije stolpčni rang ne spremeni. Linearna neodvisnost stolpčnih vektorjev $A^1, A^2, ..., A^k$ pomeni

$$\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_k A^k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Z drugimi besedami ima sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1k}\lambda_k &= 0, \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2k}\lambda_k &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mk}\lambda_k &= 0 \end{aligned}$$

samo trivialno rešitev $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Elementarna vrstična operacija ne spremeni rešitev tega sistema. Zato velja

$$\lambda_1 B^1 + \lambda_2 B^2 + \cdots + \lambda_k B^k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

in novi stolpci $B^1, B^2, ..., B^k$ so linearno neodvisni vektorji. Torej vrstične operacije ohranjajo stolpčni rang. $\square$

Opomba 2. Iz dokaza izreka 4.5 vidimo, da elementarne vrstične operacije $(v1)$–$(v3)$ ne spremenijo podprostora $\mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_m\}$, ki ga generirajo vrstice matrike $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Izrek 4.6. *Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ matrika z vrstičnim rangom k. Tedaj lahko matriko A z zaporedjem elementarnih operacij $(v1)$–$(v3)$ in $(s1)$–$(s3)$ preoblikujemo v obliko*

$$\begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Posledično je vrstični rang enak stolpčnemu rangu.

Dokaz. Če je $k = 0$, tedaj je A ničelna matrika in izrek velja. Naj bo sedaj $k \geq 1$. Potem v A obstaja neničelni element a_{ij}. Z zamenjavo i-te in prve vrstice ter z zamenjavo j-tega in prvega stolpca dobimo neničelni element na mestu $(1, 1)$. Brez izgube za splošnost smemo predpostaviti, da je $a_{11} = 1$ (sicer delimo prvo vrstico z a_{11}). Z uporabo vrstične operacije $(v2)$ in stolpčne $(s2)$ eliminiramo vse preostale elemente prve vrstice in prvega stolpca. Tako dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Postopek ponovimo na manjši matriki. Ker je vrstični rang dane matrike enak k, po $k-1$ korakih dobimo želeno obliko (4.7). Ker vrstične in stolpčne operacije ne spremenijo niti vrstičnega niti stolpčnega ranga, vidimo, da je tudi stolpčni rang dane matrike enak k. $\square$

V dokazu prejšnjega izreka smo uporabili tako vrstične kot stolpčne operacije. Če uporabimo samo vrstične operacije, lahko matriko preoblikujemo do vrstične kanonične forme. Zato velja:

Posledica 4.7. *Rang matrike A je enak številu neničelnih vrstic matrike* $\operatorname{VKF} A$.

Opomba 3. Veljajo naslednje trditve:
(i) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$;
(ii) $\operatorname{rang} I = n$, $I \in M_n(\mathbb{R})$;
(iii) za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ je $\operatorname{rang} A = n$ natanko tedaj, ko je $\operatorname{VKF} A = I$.

Posledica 4.8. *Naj bodo $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$. Vektorji $v_1, v_2, ..., v_m$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima matrika $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, kjer je $A_1 = v_1, A_2 = v_2, ..., A_m = v_m$, rang enak m.*

Dokaz. Vektorji $v_1, v_2, ..., v_m$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko tvorijo bazo prostora $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Ampak to velja natanko tedaj, ko je razsežnost prostora V enaka m in s tem $\operatorname{rang} A = m$. $\square$

Problem. Naj bo $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Kako najenostavneje izračunamo razsežnost prostora V in poiščemo primer njegove baze? Postopek je naslednji:

- Vektorje $v_1, v_2, ..., v_m$ po vrsti zapišemo v vrstice matrike $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- Z uporabo elementarnih vrstičnih operacij poiščemo vrstično kanonično formo matrike A. Denimo, da ima $\operatorname{VKF} A$ k neničelnih vrstic:
$$\operatorname{VKF} A = [B_1 B_2 ... B_k 0 ... 0].$$
- Potem je $\dim V = \operatorname{rang} A = k$.
- Ker vrstične operacije ne spremenijo podprostora V, je $V = \mathcal{L}\{B_1, B_2, ..., B_k\}$. Zato tvorijo vektorji $B_1, B_2, ..., B_k$ bazo prostora V.

Pri zgoraj opisanem postopku dejansko ni potrebno z vrstičnimi operacijami matrike preoblikovati do same vrstične kanonične forme. Lahko se ustavimo že prej, ko vidimo koliko linearno neodvisnih vrstic imamo. Te linearno neodvisne vrstice potem tvorijo bazo prostora V. Demonstrirajmo to na zgledu:

Zgled 3. Določi bazo in razsežnost podprostora
$$V = \mathcal{L}\{(1,0,1,0,1), (1,2,-4,-2,1), (1,-2,3,0,1), (-2,3,1,4,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo ustreznih vrstičnih operacij preoblikujemo matriko A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \overset{v_{12}(-1),v_{13}(-1),v_{14}(2)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{v_3\left(-\frac{1}{2}\right),v_{23}}{\longmapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{v_{23}(-2),v_{24}(-3)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{v_{34}(2),v_3(-1)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zato je $\dim V = \operatorname{rang} A = 3$ in množica $\{(1,0,1,0,1), (0,1,-1,0,0), (0,0,3,2,0)\}$ je primer baze prostora V.

4.4 Gauss-Jordanova eliminacija

V tem podpoglavju odgovorimo na vprašanje, kdaj je sistem linearnih enačb rešljiv, in podamo formalni postopek za reševanje sistemov linearnih enačb.

Kot smo videli, elementarne vrstične operacije ne spremenijo rešitev linearnega sistema. To izkoristimo za reševanje linearnega sistema $Ax = b$ z Gauss-Jordanovo metodo:

1. *Zapišemo razširjeno matriko sistema* $[A|b]$.
2. *Poiščemo vrstično kanonično formo matrike* $[A|b]$*, ki naj bo* $[A'|b']$.
3. *Zapišemo rešitev linearnega sistema* $A'x = b'$.

Točki 1. in 2. že obvladamo, z delovnim zgledom obravnavajmo še točko 3.

Delovni zgled. Naj bo razširjena matrika $[A|b]$ sistema linearnih enačb $Ax = b$ že zapisana v vrstično kanonični formi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{oz.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ x_2 \\ \mathbf{x_3} \\ x_4 \\ \mathbf{x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Glavne spremenljivke sistema linearnih enačb so tiste, ki pripadajo pivotom. Spremenljivke, ki pripadajo stolpcem brez pivotov, so *proste spremenljivke.* V našem primeru so glavne spremenljivke x_1, x_3, x_5, prosti spremenljivki sta x_2 in x_4. Nadalje, glavne spremenljivke izrazimo s prostimi

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + x_2 - 3x_4, \\ x_3 &= -2 - 2x_4, \\ x_5 &= 1, \qquad\qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

in zapišemo rešitev sistema

$$\begin{aligned} R &= \{(3 + x_2 - 3x_4, x_2, -2 - 2x_4, x_4, 1)\,|x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3, 0, -2, 0, 1) + x_2\,(1, 1, 0, 0, 0) + x_4\,(-3, 0, 2, 1, 0)\,|x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Dani sistem je rešljiv in ima dvoparametrično družino rešitev. Prav tako vidimo, da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = 3$ in to število predstavlja število glavnih spremenljivk. Število prostih spremenljivk $2 = 5 - \operatorname{rang} A$ pa določa, koliko parametrično družino rešitev dobimo.

Kaj če v matriki A med seboj zamenjamo stolpce? Kakšen vpliv ima to na sistem linearnih enačb? Preuredimo stolpce matrike $A = [A^1 A^2 A^3 A^4 A^5]$ v matriko $A' = [A^1 A^3 A^5 A^2 A^4]$. Obravnavani sistem se nam potem preoblikuje v ekvivalentno obliko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oz.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_5 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

če hkrati usklajeno zamenjamo tudi spremenljivke. Medsebojna zamenjava stolpcev v matriki sistema linearnih enačb pomeni tudi usklajeno zamenjavo spremenljivk!

Osnovni izrek o rešljivosti sistema linearnih enačb se glasi:

Izrek 4.9. *Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Sistem linearnih enačb $Ax = b$ je rešljiv natanko tedaj, ko je* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b]$. *Nadalje, če je* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = n$, *je sistem enolično rešljiv, če je* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = k < n$, *ima sistem $n - k$ parametrično družino rešitev.*

Dokaz. Naj bo sistem $Ax = b$ rešljiv. Potem obstaja rešitev $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ in lahko zapišemo

$$\begin{bmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \quad \text{oziroma} \quad x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = b.$$

To pomeni, da je zadnji stolpec razširjene matrike $[A|b] = [A^1 ... A^n b]$ linearna kombinacija stolpcev matrike A. Zato je $\operatorname{rang}[A|b] = \operatorname{rang} A$.

Obratno predpostavimo najprej, da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = n$. Potem ima vrstična kanonična forma matrike $[A|b]$ obliko

$$[A'|b'] = [I|b'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & b_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & b_n' \end{bmatrix}$$

in rešitev $x = Ix = b'$ je ena sama. Naj bo sedaj $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = k$, kjer je $k \leq n-1$. Brez izgube za splošnost smemo predpostaviti, da ima vrstična kanonična forma matrike $[A|b]$, ki ima k vrstic, obliko

$$[A'|b'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & | & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2n} & | & b_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & | & b_k' \end{bmatrix}.$$

Sicer zamenjamo stolpce matrike A' in usklajeno preindeksiramo spremenljivke! V sistemu $A'x = b'$ so $x_1, x_2, ..., x_k$ glavne spremenljivke in $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ proste spremenljivke. Prostih spremenljivk je $n-k$ in sistem ima $n-k$ parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1' - \alpha_{1,k+1} x_{k+1} - \cdots - \alpha_{1n} x_n, \\ x_2 &= b_2' - \alpha_{2,k+1} x_{k+1} - \cdots - \alpha_{2n} x_n, \\ &\vdots \\ x_k &= b_k' - \alpha_{k,k+1} x_{k+1} - \cdots - \alpha_{kn} x_n, \qquad x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

S tem je izrek dokazan. $\square$

4.5 Struktura množice rešitev sistema linearnih enačb

Glavni cilj podpoglavja je opisati strukturo množice rešitev sistema linearnih enačb $Ax = b$, kjer je $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$. Začnimo z definicijo:

Definicija. Sistem linearnih enačb $Ax = b$ je *homogen*, če je $b = 0$. Če je $b \neq 0$, je sistem *nehomogen*.

Opomba 1. Homogen sistem $Ax = 0$ je vedno rešljiv. Rešitev $x = 0$ se imenuje *trivialna rešitev*.

Izrek 4.10. *Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Množica rešitev homogenega linearnega sistema $Ax = 0$ tvori vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, katerega dimenzija je $n - \operatorname{rang} A$.*

Dokaz. Označimo z $V = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ množico rešitev homogenega sistema linearnih enačb. Naj bosta $x, y \in V$ poljubna vektorja in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ poljubna skalarja. Ker je po predpostavki $Ax = 0$ in $Ay = 0$, lahko zapišemo

$$A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x) + A(\mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$

Zato velja $\lambda x + \mu y \in V$ in V je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$.

Naj bo $\operatorname{rang} A = k$. Iz dokaza izreka 4.9 sledi, da ima sistem $Ax = 0$ k glavnih in $n-k$ prostih spremenljivk ter smemo predpostaviti, da so $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ proste spremenljivke. Za vsak $i = 1, 2, ..., n-k$ naj bo $v_i \in \mathbb{R}^n$ rešitev sistema $Ax = 0$, ki smo jo dobili z izbiro $x_{k+i} = 1$ in $x_{k+j} = 0$ za vse $j \neq i$. Vektorji $v_1, v_2, ..., v_{n-k}$ so linearno neodvisni in vsaka rešitev $x \in V$ se zapiše v obliki $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-k} v_{n-k}$, kjer je $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Zato je $\{v_1, v_2, ..., v_{n-k}\}$ baza vektorskega prostora V in $\dim V = n - k$. □

Zgled 1. Dan je sistem linearnih enačb $Ax = 0$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $V \subseteq \mathbb{R}^6$ množica rešitev danega sistema. Ker je $\operatorname{rang} A = 3$ in $n = 6$, je $\dim V = 3$. Dimenzija podprostora V seveda sovpada s številom prostih spremenljivk, ki so x_2, x_4, x_6. Glavne spremenljivke se s prostimi izražajo v obliki

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_4 - 4x_6 \\ x_3 &= -2x_4 - 3x_6 \\ x_5 &= -2x_6 \qquad\qquad x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Če v (4.8) vstavimo izbor:

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_4 & x_6 & & x_1 & x_3 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 & \Rightarrow & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Rightarrow & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Rightarrow & -4 & -3 & -2 \end{array},$$

dobimo bazne vektorje

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0, 0), \; v_2 = (-3, 0, -2, 1, 0, 0), \; v_3 = (-4, 0, -3, 0, -2, 1). \tag{4.9}$$

Formalno preverimo še, da je $\{v_1, v_2, v_3\}$ res baza prostora V. Iz (4.8) sledi, da ima sistem $Ax = 0$ rešitev

$$x = (-2x_2 - 3x_4 - 4x_6, x_2, -2x_4 - 3x_6, x_4, -2x_6, x_6), \quad x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R},$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$
\begin{aligned}
x &= x_2(-2,1,0,0,0,0) + x_4(-3,0,-2,1,0,0) + x_6(-4,0,-3,0,-2,1) \\
&= x_2 v_1 + x_4 v_2 + x_6 v_3
\end{aligned}
$$

kjer so $x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R}$. Vidimo, da je vsaka rešitev $x \in V$ linearna kombinacija neodvisnih vektorjev v_1, v_2, v_3.

Lema 4.11. *Če sta x_1 in x_2 rešitvi nehomogenega sistema $Ax = b$, potem je razlika $x_1 - x_2$ rešitev homogenega sistema $Ax = 0$.*

Dokaz. Naj bo $Ax_1 = b$ in $Ax_2 = b$ ter $x = x_1 - x_2$. Potem velja

$$
Ax = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0
$$

in x je rešitev homogenega sistema $Ax = 0$. □

Naj bo x_p izbrana (*partikularna*) rešitev nehomogenega sistema linearnih enačb $Ax = b$ in naj bo x_h poljubna rešitev homogenega sistema $Ax = 0$. Tedaj je $x = x_p + x_h$ rešitev nehomogenega sistema, saj velja

$$
Ax = A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + 0 = b.
$$

Naslednji izrek pove, da so vse rešitve sistema $Ax = b$ dejansko take oblike.

Izrek 4.12. *Naj ima sistem linearnih enačb $Ax = b \neq 0$ partikularno rešitev x_p in naj bo V množica rešitev homogenega sistema $Ax = 0$. Potem je množica rešitev sistema $Ax = b$ enaka*

$$
x_p + V = \{x_p + x_h | x_h \in V\}.
$$

Dokaz. Naj za $x \in \mathbb{R}^n$ velja $Ax = b$. Ker sta x in x_p rešitvi nehomogenega sistema $Ax = b$, je po prejšnji lemi njuna razlika $x_h = x - x_p$ rešitev homogenega sistema $Ax = 0$. Zato je $x_h \in V$ in lahko zapišemo $x = x_p + x_h$. □

Opomba 2. Naj bo rang $A = k$ in naj bo $\{v_1, v_2, ..., v_{n-k}\}$ baza rešitev homogenega sistema $Ax = 0$. Tedaj je vsaka rešitev sistema $Ax = b$ oblike

$$
x = x_p + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-k} v_{n-k}, \quad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}.
$$

Zgled 2. Sistem linearnih enačb je podan z razširjeno matriko

$$
[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}.
$$

V zgledu 1 smo že poiskali bazne vektorje v_1, v_2, v_3 množice rešitev homogenega sistema $Ax = 0$, glej (4.9). Neposredno z računom hitro preverimo, da je $x_p =$

$(2, -4, -3, 1, 1, 1)$ partikularna rešitev danega sistema linearnih enačb. Zato ima obravnavani sistem rešitev

$$x = x_p + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

To pomeni

$$\begin{aligned} x &= (2, -4, -3, 1, 1, 1) + \lambda_1 (-2, 1, 0, 0, 0, 0) + \lambda_2 (-3, 0, -2, 1, 0, 0) \\ &\quad + \lambda_3 (-4, 0, -3, 0, -2, 1) \\ &= (2 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 4\lambda_3, -4 + \lambda_1, -3 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3, 1 + \lambda_2, 1 - 2\lambda_3, 1 + \lambda_3), \end{aligned}$$

kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

4.6 Obstoj in izračun inverzne matrike

V podpoglavju 3.5 smo definirali obrnljivost matrik v matrični algebri $M_n(\mathbb{R})$. Spomnimo se, da je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ *obrnljiva*, če obstaja taka matrika $X \in M_n(\mathbb{R})$, da velja

$$AX = XA = I.$$

Matrika X je *inverzna matrika* matrike A in se jo označi z A^{-1}. Prav tako smo navedli, da v matrični algebri $M_n(\mathbb{R})$ iz enakosti $AX = I$ sledi tudi $XA = I$. Zato v definiciji obrnljivosti matrike zadošča zahtevati samo $AX = I$. V tem podpoglavju bomo karakterizirali obrnljive matrike in spoznali postopek izračuna inverzne matrike. Začnimo z osnovnim izrekom:

Izrek 4.13. *Za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ so naslednje trditve ekvivalentne:*
(*i*) *A je obrnljiva matrika;*
(*ii*) *sistem linearnih enačb $Ax = b$ je enolično rešljiv za vsak $b \in \mathbb{R}^n$;*
(*iii*) $\operatorname{rang} A = n$*;*
(*iv*) *vrstična kanonična forma matrike A je enaka I;*
(*v*) *A lahko zapišemo kot produkt elementarnih matrik.*

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Naj obstaja inverzna matrika A^{-1} in naj bo dan sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$. Če enakost $Ax = b$ z leve strani pomnožimo z A^{-1}, dobimo

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \text{oz.} \quad x = A^{-1}b.$$

Vsak sistem $Ax = b$ ima torej enolično rešitev.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Naj bo $b \in \mathbb{R}^n$ poljuben vektor in naj bodo $A^1, A^2, ..., A^n \in \mathbb{R}^n$ stolpci matrike A. Potem lahko sistem linearnih enačb $Ax = b$, ki ima enolično rešitev $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \quad \text{oz.} \quad x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = b.$$

Vidimo, da se vsak vektor $b \in \mathbb{R}^n$ enolično izraža kot linearna kombinacija vektorjev $A^1, A^2, ..., A^n \in \mathbb{R}^n$. Zato tvorijo stolpci $A^1, A^2, ..., A^n$ matrike A bazo prostora $\mathbb{R}^n$ in

$$\operatorname{rang} A = \dim \mathcal{L}\left\{A^1, A^2, ..., A^n\right\} = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Ker ima matrika A rang, enak n, ima vrstična kanonična forma matrike A n neničelnih vrstic. Zato je $\mathrm{VKF}\, A = I$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Ker je $\mathrm{VKF}\, A = I$, obstaja zaporedje elementarnih vrstičnih operacij vseh treh tipov $p_1, p_2, ..., p_k$, ki matriko A prevedejo do identitete I. Vrstične operacije predstavimo kot množenje matrike z leve strani z elementarnimi matrikami. Naj vrstični operaciji p_i pripada elementarna matrika P_i. Potem velja

$$P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 A = I. \tag{4.10}$$

Vsaka elementarna matrika P_i je obrnljiva in inverz P_i^{-1} je tudi elementarna matrika (glej trditev 4.2). Če enakost (4.10) z leve strani po vrsti množimo z matrikami $P_k^{-1}, P_{k-1}^{-1}, ..., P_1^{-1}$, dobimo

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1}.$$

Torej se matriko A lahko zapiše kot produkt elementarnih matrik.

$(v) \Rightarrow (i)$ Predpostavimo, da se matriko A lahko zapiše kot produkt elementarnih matrik $A = P_1 P_2 \cdots P_k$. Elementarne matrike so obrnljive, zato je po trditvi 3.9 obrnljiva tudi matrika A, velja $A^{-1} = P_k^{-1} P_{k-1}^{-1} \cdots P_1^{-1}$. □

Vidimo, da so obrnljive matrike natanko tiste kvadratne matrike, ki imajo polni rang. To je najboljša karakterizacija obrnljivih matrik, ker jo v praksi lahko enostavno preverimo s postopkom Gaussove eliminacije. Prav tako z uporabo Gauss-Jordanove eliminacije izračunamo inverzno matriko A^{-1}. Postopek je naslednji:

Razširimo matriko A z identiteto I, dobimo matriko $[A|I]$. Z elementarnimi vrstičnimi operacijami prevedemo matriko $[A|I]$ do vrstične kanonične forme, ki ima obliko $[I|A^{-1}]$. Torej velja

$$\mathrm{VKF}\,[A|I] = \left[I|A^{-1}\right].$$

1. način utemeljitve: Po predpostavki je A obrnljiva matrika in zato je $\mathrm{VKF}\, A = I$. Ustrezno zaporedje elementarnih vrstičnih operacij matriko A prevede do identitete

$$P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 A = I. \tag{4.11}$$

Vidimo, da je potem $A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1$. Zato dano zaporedje vrstičnih operacij identiteto I prevede do inverzne matrike A^{-1}. Torej nam dano zaporedje operacij matriko $[A|I]$ prevede do matrike $[I|A^{-1}]$.

2. način utemeljitve: Rešimo matrično enačbo $AX = I$, to pomeni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Označimo z $x_k = X^k \in \mathbb{R}^n$ k-ti stolpec matrike X in z $e_k = I^k \in \mathbb{R}^n$ k-ti stolpec identitete I. Dejansko rešujemo n linearnih sistemov

$$Ax_1 = e_1,\ Ax_2 = e_2,\ \cdots,\ Ax_n = e_n.$$

Po predpostavki ima matrika A rang, enak n, zato so vsi ti sistemi linearnih enačb enolično rešljivi. Dane sisteme enačb rešujemo hkrati, tako da razširimo matriko A z identiteto I. Z Gauss-Jordanovo eliminacijo poiščemo vrstično kanonično formo matrike $[A|I]$, ki je enaka $[I|X]$ in velja $X = A^{-1}$.

Opomba. S prvim načinom smo matriki A poiskali matriko X, za katero velja $XA = I$, glej (4.11). Z drugim postopkom pa smo poiskali matriko X, za katero velja $AX = I$. Oba postopka sovpadata VKF $[A|I] = [I|X]$! Zato je utemeljen izrek 3.9: če obstaja $X \in M_n(\mathbb{R})$ z lastnostjo $AX = I$, potem velja tudi $XA = I$.

Zgled 1. Izračunajmo inverzno matriko matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiskati moramo vrstično kanonično formo razširjene matrike

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo Gauss-Jordanovo eliminacijo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{v_{13}}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{v_{12}(-1), v_{13}(-2)}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & | & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{v_{23}(1), v_{21}(-1)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & | & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{v_3\left(-\frac{1}{4}\right)}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \overset{v_{32}(1), v_{31}(-3)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Ker je

$$\mathrm{VKF}\,[A|I] = \left[I|A^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

vidimo, da je iskana inverzna matrika enaka

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zgled 2. Glede na realni parameter λ obravnavajmo obrnljivost matrike

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je njen rang enak 4. Ker vrstične in stolpčne operacije ne spremenijo ranga matrike, jih uporabimo za določanje ranga matrike A:

$$A \overset{s_{31}(-1)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1+\lambda & 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \overset{v_{13}(1)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Če je $\lambda = 1$, rang matrike ni več poln in matrika A ni obrnljiva. Naj bo $\lambda \neq 1$. Potem lahko zgornjo matriko z zaporedjem stolpčnih operacij $s_1\left((1-\lambda)^{-1}\right)$, $s_{12}(-2)$, $s_{13}(1)$, $s_4(-1)$ preoblikujemo v obliko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Če je $\lambda = 2$, se rang matrike A zmanjša in matrika ni obrnljiva. Zato naj bo nadalje tudi $\lambda \neq 2$. V tem primeru z uporabo stolpčnih operacij $s_4((2-\lambda)^{-1})$ in $s_{43}(1)$ zgornjo matriko prevedemo v

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nazadnje zapišimo še

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_{32}(1)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{v_{23}(-1)}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V primeru $\lambda = 3$ ali $\lambda = -3$ se rang matrike A spet zmanjša in matrika ni obrnljiva. Če $\lambda \notin \{1, 2, 3, -3\}$, ima matrika A rang enak 4 in je obrnljiva.

Poglavje 5

Determinanta

5.1 Uvod

Determinanto reda 2 in reda 3 smo že vpeljali pri geometrijskih vektorjih (računanje vektorskega in mešanega produkta). Ponovimo nekatere lastnosti, ki jih imata omenjeni determinanti.

Determinanta reda 2. Naj bo $A \in M_2(\mathbb{R})$. Potem je determinanta matrike A, ki jo označimo z $\det A$, enaka

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Lastnosti determinante, ki smo jih že dokazali, so:

1. $|\det A|$ predstavlja ploščino paralelograma, ki ga v ravnini $\mathbb{R}^2$ določata stolpčna vektorja
$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

2. Vektorja A^1, A^2 sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

3. Matrika $A \in M_2(\mathbb{R})$ je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$ in velja
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Determinanta reda 3. Naj bo $A \in M_3(\mathbb{R})$. Potem je determinanta matrike A definirana rekurzivno s tako imenovanim razvojem po prvem stolpcu

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Spomnimo se še lastnosti:

1. $\det A$ predstavlja mešani produkt (A^1, A^2, A^3) stolpčnih vektorjev $A^1, A^2, A^3 \in \mathbb{R}^3$.

2. $|\det A|$ predstavlja prostornino paralelepipeda v $\mathbb{R}^3$, določenega z vektorji A^1, A^2, A^3.

3. Vektorji A^1, A^2, A^3 so linearno neodvisni natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Vidimo, da sta determinanti reda 2 in 3 zelo uporabni. Tudi v splošnem z uporabo determinante preverjamo linearno neodvisnost vektorjev, determinanta je kriterij za obrnljivost matrik, z uporabo determinante rešujemo kvadratne sisteme linearnih enačb in računamo inverzne matrike. Absolutna vrednost determinante predstavlja prostornino ustreznega telesa v $\mathbb{R}^n$, ki ga določa n vektorjev. Determinanto splošne $n \times n$ matrike lahko definiramo na več ekvivalentnih načinov. V našem pristopu bomo determinanto definirali z uporabo *permutacij*, bijektivnih preslikav množice $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. Demonstrirajmo to na zgledu determinante reda 2 in 3.

Determinanta reda 2. Naj bo $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ in $\pi : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ bijektivna preslikava. Na množici $\mathbb{N}_2$ imamo samo dve permutaciji

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutacija π_1 je identiteta, ki ohranja oba elementa: $\pi_1(1) = 1$, $\pi_1(2) = 2$. Permutacija π_2 predstavlja transpozicijo, kjer zamenjamo elementa: $\pi_2(1) = 2$, $\pi_2(2) = 1$. Vsako permutacijo tudi predznačimo, glede na to, koliko transpozicij predstavlja. Pravimo, da je π_1 soda permutacija in ima predznak $\varepsilon_{\pi_1} = 1$, medtem ko je π_2 liha permutacija in ima predznak $\varepsilon_{\pi_2} = -1$. Naj bo $\mathcal{S}_2 = \{\pi_1, \pi_2\}$. Potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= a_{1,\pi_1(1)}a_{2,\pi_1(2)} - a_{1,\pi_2(1)}a_{2,\pi_2(2)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_2} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}. \end{aligned}$$

Determinanta reda 3. Naj bo $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ in $\pi : \mathbb{N}_3 \to \mathbb{N}_3$ permutacija. Množica vseh permutacij na $\mathbb{N}_3$ ima 6 elementov $\mathcal{S}_3 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$. Dane permutacije so definirane z naslednjimi predpisi

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \pi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \varepsilon_{\pi_i} = 1 \qquad \left.\begin{aligned} \pi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \pi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \pi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \varepsilon_{\pi_i} = -1.$$

Izkaže se, da so prve tri permutacije sode in imajo predznak 1, medtem ko so zadnje tri permutacije lihe, imajo predznak -1. Pri zadnjih treh permutacijah je vedno en element fiksiran, preostala dva pa se zamenjata. Če sedaj uskladimo indeksacijo elementov v determinanti reda 3 s slikami ustreznih permutacij, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= a_{1,\pi_1(1)}a_{2,\pi_1(2)}a_{3,\pi_1(3)} + a_{1,\pi_2(1)}a_{2,\pi_2(2)}a_{3,\pi_2(3)} + a_{1,\pi_3(1)}a_{2,\pi_3(2)}a_{3,\pi_3(3)} \\
&\quad - a_{1,\pi_4(1)}a_{2,\pi_4(2)}a_{3,\pi_4(3)} - a_{1,\pi_5(1)}a_{2,\pi_5(2)}a_{3,\pi_5(3)} - a_{1,\pi_6(1)}a_{2,\pi_6(2)}a_{3,\pi_6(3)} \\
&= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_3} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}a_{3,\pi(3)}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je determinanta matrike enaka predznačeni vsoti, ki teče po vseh permutacijah množice $\mathbb{N}_3$, produktov treh elementov $a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}a_{3,\pi(3)}$, kjer nastopa natanko en element iz vsake vrstice in vsakega stolpca. Iz i-te vrstice je izbran element iz stolpca $\pi(i)$, torej $a_{i,\pi(i)}$. Na podoben način definiramo tudi determinanto matrike velikosti $n \times n$. Da bomo lahko to korektno naredili, bodo v naslednjem podpoglavju obravnavane osnovne lastnosti permutacij.

5.2 Permutacije

Naj bo $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. *Permutacija* množice $\mathbb{N}_n$ je bijektivna preslikava $\pi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Za zapis permutacije uporabimo naslednjo obliko

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Množico vseh permutacij na $\mathbb{N}_n$ označimo z $\mathcal{S}_n$.

Zgled 1. Preslikava

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je permutacija na $\mathbb{N}_5$. To pomeni: $\pi(1) = 2, \pi(2) = 4, \pi(3) = 5, \pi(4) = 1, \pi(5) = 3$.

Opomba 1. Naj bo A končna množica in $f : A \to A$ preslikava. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(*i*) f je bijektivna preslikava,
(*ii*) f je surjektivna preslikava,
(*iii*) f je injektivna preslikava.

Opomba 2. Vseh permutacij množice $\mathbb{N}_n$ je $n!$, torej $|\mathcal{S}_n| = n!$. Namreč, element $\pi(1)$ lahko izberemo na n načinov, $\pi(2)$ na $n-1$ načinov in podobno naprej. Po osnovnem izreku kombinatorike je število vseh možnih izbir enako $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Naj bosta π, σ permutaciji množice $\mathbb{N}_n$. Tedaj je tudi njun *produkt* (kompozitum) $\pi\sigma = \pi \circ \sigma$, ki je definiran s predpisom

$$(\pi\sigma)(k) = (\pi \circ \sigma)(k) = \pi(\sigma(k)) \quad \text{za vsak } k \in \mathbb{N}_n,$$

permutacija na $\mathbb{N}_n$. Namreč, kompozitum bijektivnih preslikav je bijektivna preslikava. Produkt permutacij v splošnem ni komutativen.

Zgled 2. Naj bosta

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\begin{aligned} \pi\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in vidimo $\pi\sigma \neq \sigma\pi$.

Z $id \in \mathcal{S}_n$ označimo identično permutacijo, ki je definirana kot $id(k) = k$ za vsak $k \in \mathbb{N}_n$. Za vsako permutacijo $\pi \in \mathcal{S}_n$ velja $\pi\, id = id\, \pi = \pi$. Namreč,

$$\begin{aligned} (\pi\, id)(k) &= \pi(id(k)) = \pi(k), \\ (id\, \pi)(k) &= id(\pi(k)) = \pi(k) \end{aligned}$$

za vsak $k \in \mathbb{N}_n$. Za poljubne $\pi, \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ velja asociativnost množenja $(\pi\sigma)\tau = \pi(\sigma\tau)$. Vidimo, da je

$$((\pi\sigma)\tau)(k) = (\pi\sigma)(\tau(k)) = \pi(\sigma(\tau(k))) = \pi((\sigma\tau)(k)) = (\pi(\sigma\tau))(k)$$

za vsak $k \in \mathbb{N}_n$. Za vsako permutacijo $\pi \in \mathcal{S}_n$, obstaja permutacija $\sigma \in \mathcal{S}_n$, da je $\pi\sigma = \sigma\pi = id$. Permutacija σ je inverzna permutacija in jo označimo s π^{-1}. Inverzna permutacija je definirana z inverzno preslikavo. Dokazali smo:

Trditev 5.1. *Množica permutacij $\mathcal{S}_n$, ki je opremljena z množenjem (komponiranjem) je* ***grupa****, to pomeni:*

G1 $(\pi\sigma)\tau = \pi(\sigma\tau)$ za vse $\pi, \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$.

G2 Obstaja $id \in \mathcal{S}_n$, da je $\pi\, id = id\, \pi = \pi$ za vsak $\pi \in \mathcal{S}_n$.

G3 Za vsak $\pi \in \mathcal{S}_n$ obstaja $\pi^{-1} \in \mathcal{S}_n$, da je $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = id$.

Permutacijsko grupo $\mathcal{S}_n$ v literaturi srečamo tudi pod imenom *simetrična grupa*.

Definicija. Permutacija $\pi \in \mathcal{S}_n$ je *transpozicija*, če zamenja dva elementa; obstajata $i, j \in \mathbb{N}_n$, da je $\pi(i) = j, \pi(j) = i$ in $\pi(k) = k$ za vsak $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, j\}$.

Če transpozicija π zamenja elementa i in j, jo krajše označimo s $\pi = (i\ j)$. Ker je $(i\ j)(i\ j) = id$, vidimo, da je transpozicija π sama sebi inverzna permutacija, torej velja $\pi^{-1} = \pi$.

Pravimo, da je permutacija σ *transpozicija permutacije* π, če je $\sigma = \pi(i\ j)$, kjer sta $i, j \in \mathbb{N}_n$. To pomeni, da sta pri permutacijah π in σ na mestih i in j zamenjani sliki; $\sigma(i) = \pi(j)$ in $\sigma(j) = \pi(i)$ ter $\sigma(k) = \pi(k)$ za vsak $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, j\}$.

Zgled 3. Naj bosta

$$\pi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & 4 & 5 & 1 & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & 4 & 5 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Potem je σ transpozicija permutacije π. Ker lahko zapišemo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} (1\ 5),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

vidimo, da velja $\sigma = \pi(1\ 5) = (2\ 3)\pi$.

Permutacijska grupa $\mathcal{S}_3$ vsebuje 6 permutacij, od katerih so tri transpozicije:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2).$$

Identiteto id na primer lahko zapišemo kot produkt dveh transpozicij $id = (1\ 2)(1\ 2)$. Ali lahko tudi permutaciji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zapišemo kot produkt transpozicij? Iz računov

$$(1\ 2)\pi = (1\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3),$$

$$(1\ 3)\sigma = (1\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)$$

sledi pritrdilen odgovor: $\pi = (1\ 2)(2\ 3)$ in $\sigma = (1\ 3)(2\ 3)$. Omenjena lastnost ni posebnost, ampak velja tudi v splošnem.

Trditev 5.2. *Vsako permutacijo $\pi \in \mathcal{S}_n$ lahko zapišemo kot produkt transpozicij.*

Dokaz. Dokaz bo potekal z uporabo matematične indukcije. V primeru $n = 2$ trditev velja, ker je $\pi = (1\ 2)$ transpozicija in identiteta $id = (1\ 2)(1\ 2)$ je produkt transpozicij. Naj bo $n > 2$. Po indukcijski predpostavki lahko vsako permutacijo iz $\mathcal{S}_{n-1}$ zapišemo kot produkt transpozicij. Naj bo $\pi \in \mathcal{S}_n$. Če je $\pi(n) = n$, potem jo lahko gledamo kot permutacijo množice $\mathbb{N}_{n-1}$. Po indukcijski predpostavki je takšna permutacija produkt transpozicij. Naj bo torej $\pi(n) = k \neq n$. Naj bo $\sigma = (k\ n)$ transpozicija. Potem za permutacijo $\sigma\pi$ velja

$$(\sigma\pi)(n) = \sigma(\pi(n)) = \sigma(k) = n.$$

Zato lahko na $\sigma\pi$ gledamo kot na permutacijo množice $\mathbb{N}_{n-1}$. Po indukcijski predpostavki obstajajo transpozicije $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$, da velja $\sigma\pi = \tau_1\tau_2...\tau_k$. Če dano enakost z leve strani pomnožimo z σ, upoštevamo, da je $\sigma\sigma = id$, sledi željeni rezultat $\pi = \sigma\tau_1\tau_2...\tau_k$. $\square$

Zgled 4. Zapišimo permutacijo

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

kot produkt transpozicij. Naj bo $\tau_1 = (1\ 2)$. Potem je

$$\tau_1\pi = (1\ 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \pi_1.$$

Nadalje, naj bo $\tau_2 = (2\ 4)$. Potem velja

$$\tau_2\tau_1\pi = \tau_2\pi_1 = (2\ 4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\ 5).$$

Če označimo še $\tau_3 = (3\ 5)$, smo dobili željeni zapis $\pi = \tau_1\tau_2\tau_3 = (1\ 2)(2\ 4)(3\ 5)$.

Definicija. Permutacija $\pi \in \mathcal{S}_n$ je soda, če jo lahko zapišemo kot produkt sodega števila transpozicij. Sicer je permutacija liha. Predznak permutacije je število

$$\varepsilon_\pi = \begin{cases} 1 & ; \pi \text{ soda} \\ -1 & ; \pi \text{ liha} \end{cases}.$$

Brez dokaza navedimo naslednji izrek, ki utemelji dobro definiranost predznaka permutacije (dokaz izreka bralec najde v [7, poglavje IV, stran 57]). Zapis permutacije kot produkt transpozicij seveda ni enoličen niti po dolžini niti po vrstnem redu zapisa.

Izrek 5.3. *Denimo, da smo $\pi \in \mathcal{S}_n$ zapisali kot produkt k transpozicij in kot produkt s transpozicij. Tedaj sta k in s bodisi sodi števili bodisi lihi števili.*

Zgled 4. Določimo predznak nekaterih delovnih permutacij:

- Ker je $id = (i\ j)\,(i\ j)$, je identiteta soda permutacija.
- Permutacija
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)\,(2\ 4)\,(3\ 5)$$
je liha permutacija.
- Permutaciji
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)\,(2\ 3) \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)\,(2\ 3)$$
sta sodi permutaciji.

Posledica 5.4. *Naj bo $\pi \in \mathcal{S}_n$. Potem velja*
(i) $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi^{-1}}$,
(ii) če je σ tanspozicija od π, potem je $\varepsilon_\sigma = -\varepsilon_\pi$.

Dokaz. Ker je $id = \pi\pi^{-1}$ soda permutacija, sta obe permutaciji π in π^{-1} bodisi sodi bodisi lihi. Naj bo σ transpozicija permutacije π. Tedaj obstajata $i, j \in \mathbb{N}_n$, da velja $\sigma = \pi\,(i\ j)$. Zato sta permutaciji π in σ različno predznačeni. $\square$

Pri delu s permutacijami je elegantno uporabljati cikle. Če za $\pi \in \mathcal{S}_n$ velja $\pi\,(i_1) = i_2, \pi\,(i_2) = i_3, ..., \pi\,(i_{k-1}) = i_k, \pi\,(i_k) = i_1$ in so vsi ostali i fiksni, $\pi\,(i) = i$, tedaj permutacijo π imenujemo *cikel dolžine* k in zapišemo $\pi = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$. Transpozicija $(i\ j)$ je cikel dolžine 2. Hitro lahko premislimo, da veljata naslednji dejstvi:

- vsaka permutacija je produkt ločenih ciklov (cikli nimajo skupnih elementov);
- vsak cikel dolžine k je, na primer, produkt $k-1$ transpozicij
$$\pi = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_2)\,(i_2\ i_3)\cdots(i_{k-1}\ i_k)\,.$$

Zgled 5. Zapišimo dane permutacije kot produkt ločenih ciklov in kot produkt transpozicij:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) = (1\ 2)\,(2\ 3)\,,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)\,(3\ 5) = (1\ 2)\,(2\ 4)\,(3\ 5)\,,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 5\ 4) = (1\ 3)\,(3\ 2)\,(2\ 5)\,(5\ 4)\,.$$

5.3 Definicija in osnovne lastnosti determinante

V tem podpoglavju bomo definirali determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$ in opisali osnovne lastnosti determinante kot funkcije $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Z $\mathcal{S}_n$ označimo simetrično grupo vseh permutacij množice $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. Za permutacijo $\pi \in \mathcal{S}_n$ bomo z ε_π označili predznak permutacije π.

Definicija. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Tedaj je *determinanta* matrike A enaka

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

V uvodnem podpoglavju smo že videli, da dana definicija v primeru $n = 2$ in $n = 3$ predstavlja znani determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ker je $|\mathcal{S}_n| = n!$, ima determinanta $n \times n$ realne matrike $n!$ členov. Zato je računanje determinante neposredno iz definicije pri večjih n zelo neekonomično. Metode za računanje determinante bomo razvili v naslednjem podpoglavju 5.4; te slonijo na lastnostih determinante. Pri naslednjih zgledih bomo determinanto računali neposredno po definiciji.

Zgled 1. Determinanta diagonalne matrike je enaka produktu diagonalnih elementov

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{in} \quad \det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Če za permutacijo π velja, da je $\pi(k) \neq k$ za neko naravno število k, potem je $a_{k,\pi(k)} = 0$. Zato je člen, ki v determinanti pripada permutaciji π, enak 0. Edini neničelni člen lahko pričakujemo samo pri $\pi = id$. Ker je $\varepsilon_{id} = 1$, sledi $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. V posebnem primeru velja $\det I = 1$.

Zgled 2. Če ima matrika A ničelno vrstico, potem je $\det A = 0$. Naj bo i-ta vrstica matrike A ničelna. To pomeni $a_{i,\pi(i)} = 0$ za vsak $\pi \in \mathcal{S}_n$. Pri vsaki permutaciji π je člen, ki v determinanti pripada tej permutaciji, zato enak 0.

Zgled 3. Determinanta zgornje trikotne matrike je enaka produktu diagonalnih elementov

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Če za permutacijo π velja $\pi(n) \neq n$, potem je $a_{n,\pi(n)} = 0$ in člen, ki v determinanti pripada permutaciji π, je enak 0. Neničeln člen lahko dobimo, če je $\pi(n) = n$. Zaradi bijektivnosti podobno sledi, da neničeln člen lahko dobimo le, ko velja $\pi(n-1) = n-1, \pi(n-2) = n-2, ..., \pi(2) = 2, \pi(1) = 1$. Torej je $\pi = id$ in $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Zgled 4. Izračunajmo determinanto

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Če za permutacijo π velja $\pi(1) \neq n$, je $a_{1,\pi(1)} = 0$ in členi takih permutacij v determinanti so enaki 0. Če podobno nadaljujemo, zaradi bijektivnosti sledi, da lahko neničeln člen dobimo samo v primeru

$$\pi(1) = n, \pi(2) = n-1, \cdots, \pi(n-1) = 2, \pi(n) = 1.$$

Torej je $\det A = \varepsilon_\pi a_{1n}a_{2,n-1}...a_{n-1,2}a_{n1}$, kjer je

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Določiti moramo še samo predznak permutacije π. Če je $n = 2k$ sodo število, lahko π zapišemo kot produkt k transpozicij $\pi = (1\ n)\,(2\ n-1)\ldots(k\ k+1)$. Zato je $\varepsilon_\pi = (-1)^k = (-1)^{n/2}$. Če je $n = 2k+1$ liho število, potem je točka $k+1$ fiksna točka permutacije π in π je produkt k transpozicij $\pi = (1\ n)\,(2\ n-1)\ldots(k\ k+2)$. Zato je $\varepsilon_\pi = (-1)^k = (-1)^{n/2-1/2}$. Naj [ ] označuje funkcijo celi del. Če poenotimo oba primera, lahko zapišemo

$$\det A = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{1n}a_{2,n-1}...a_{n-1,2}a_{n1}.$$

V nadaljevanju bodo obravnavane osnovne lastnosti determinante. Kaj lahko rečemo o determinanti transponirane matrike?

Trditev 5.5. *Naj bo* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Potem velja* $\det A^T = \det A$.

Dokaz. Najprej upoštevamo definicijo transponirane matrike in zapišemo

$$\begin{aligned}\det A^T &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi \left(A^T\right)_{1,\pi(1)} \cdots \left(A^T\right)_{i,\pi(i)} \cdots \left(A^T\right)_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i),i} \cdots a_{\pi(n),n}.\end{aligned}$$

Naj bo $\pi \in \mathcal{S}_n$. Če permutacija π preteče celo množico $\mathcal{S}_n$, potem tudi njena inverzna permutacija π^{-1} preteče celo množico $\mathcal{S}_n$, ker je $\mathcal{S}_n$ grupa. Nadalje, iz posledice 5.4 (i) sledi, da imata permutaciji π in π^{-1} enak predznak, $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi^{-1}}$. Zgornjo vsoto tako preuredimo

$$\begin{aligned}\det A^T &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdots a_{i,\pi^{-1}(i)} \cdots a_{n,\pi^{-1}(n)}. \\ &= \sum_{\pi^{-1}\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_{\pi^{-1}} a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdots a_{i,\pi^{-1}(i)} \cdots a_{n,\pi^{-1}(n)} \\ &= \det A\end{aligned}$$

in trditev je dokazana. □

Opomba. Vrstice matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$ so vektorji $A_1, A_2, ..., A_n$ iz $V = \mathbb{R}^n$. Determinanta je tudi funkcija, definirana na vrsticah matrike A, to pomeni $\det : V^n \to \mathbb{R}$. Zato lahko zapišemo

$$\det A = \det(A_1, A_2, ..., A_n).$$

Podobno je determinanta tudi funkcija, ki je definirana na stolpcih matrike A, torej

$$\det A = \det\left(A^1, A^2, ..., A^n\right).$$

Ker je $\det A = \det A^T$, vse lastnosti determinante, ki veljajo za vrstice, veljajo tudi za stolpce. Zato bomo v nadaljevanju trditve praviloma formulirali samo za vrstice. Determinanto bomo obravnavali kot vrstično funkcijo $\det A = \det(A_1, A_2, ..., A_n)$.

Izrek 5.6. *Determinanta je vrstično linearna funkcija, to pomeni*
(i) $\det(A_1, ..., B_i + C_i, ..., A_n) = \det(A_1, ..., B_i, ..., A_n) + \det(A_1, ..., C_i, ..., A_n)$,
(ii) $\det(A_1, ..., \lambda A_i, ..., A_n) = \lambda \det(A_1, ..., A_i, ..., A_n)$, *kjer je* $\lambda \in \mathbb{R}$,
za vsak $i \in \mathbb{N}_n$.

Prva točka v izreku 5.6 pove, da je determinanta vrstično aditivna funkcija. Če je v matriki A i-ta vrstica $A_i = B_i + C_i$ vsota dveh vektorjev $B_i, C_i \in \mathbb{R}^n$, potem je $\det A$ enaka vsoti dveh determinant, kjer stojita v i-ti vrstici matrike vektorja B_i oziroma C_i. Druga točka izreka pove, da je determinanta vrstično homogena funkcija. Če v matriki A i-to vrstico A_i pomnožimo s skalarjem λ, potem se lahko λ izpostavi pred determinanto. Obe lastnosti (i) in (ii) lahko združimo v ekvivalentno obliko

$$\det(A_1, ..., \lambda B_i + \mu C_i, ..., A_n) = \lambda \det(A_1, ..., B_i, ..., A_n) + \mu \det(A_1, ..., C_i, ..., A_n),$$

kjer sta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. V primeru $n = 3$ in linearnosti po drugi vrstici to pomeni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda b_1 + \mu c_1 & \lambda b_2 + \mu c_2 & \lambda b_3 + \mu c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Posebej omenimo, da lahko linearnost determinante po i-ti vrstici posplošimo. Če je v matriki A i-ta vrstica linearna kombinacija vektorjev iz $\mathbb{R}^n$, to pomeni $A_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$, tedaj se ustrezno izraža tudi determinanta matrike A:

$$\det\left(A_1, ..., \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j, ..., A_n\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \det(A_1, ..., v_j, ..., A_n).$$

Dokaz izreka 5.6. Naj bosta λ, μ poljubna realna skalarja in naj bo i-ta vrstica matrike A enaka $A_i = \lambda B_i + \mu C_i$. Torej je vsak element i-te vrstice matrike A oblike $a_{ij} = \lambda b_j + \mu c_j$ za vsak $j \in \mathbb{N}_n$. Potem velja

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots a_{i,\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots \left(\lambda b_{\pi(i)} + \mu c_{\pi(i)}\right) \cdots a_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots \lambda b_{\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} + \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots \mu c_{\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\ &= \lambda \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots b_{\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} + \mu \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots c_{\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\ &= \lambda \det(A_1, ..., B_i, ..., A_n) + \mu \det(A_1, ..., C_i, ..., A_n). \end{aligned}$$

S tem je izrek dokazan. $\square$

Posledica 5.7. *Naj bo* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *in* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tedaj je* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Dokaz. Posledica sledi iz prejšnjega izreka, kjer upoštevamo, da je determinanta vrstično homogena funkcija $\det(\lambda A) = \det(\lambda A_1, \lambda A_2, ..., \lambda A_n) = \lambda^n \det A$. $\square$

Lema 5.8. *Če v matriki med seboj zamenjamo dve vrstici, potem determinanta spremeni predznak.*

Dokaz. Brez izgube za splošnost privzemimo, da smo v matriki A zamenjali prvo in drugo vrstico. Označimo

$$A = [A_1 A_2 A_3 ... A_n] \quad \text{in} \quad A' = [A_2 A_1 A_3 ... A_n].$$

Naj bo π permutacija in s $\sigma = \pi\,(1\ 2)$ označimo transpozicijo permutacije π. Potem je $\sigma(1) = \pi(2)$, $\sigma(2) = \pi(1)$ in $\sigma(i) = \pi(i)$ za vse $i \neq 1, 2$. Po posledici 5.4 (*ii*) je $\varepsilon_\sigma = -\varepsilon_\pi$. Nadalje, množica vseh permutacij $\mathcal{S}_n$ je grupa. Če permutacija π

preteče celo množico $\mathcal{S}_n$, potem tudi njena transpozicija σ preteče celo množico $\mathcal{S}_n$. Upoštevajoč vse omenjeno, sledi

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{i,\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{2,\pi(2)} a_{1,\pi(1)} \cdots a_{i,\pi(i)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} -\varepsilon_\sigma a'_{1,\sigma(1)} a'_{2,\sigma(2)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_\sigma a'_{1,\sigma(1)} a'_{2,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)} \\
&= -\det A'
\end{aligned}$$

in dobili smo željeni rezultat. □

Posledica 5.9. *Veljata naslednji trditvi:*

(*i*) *Če sta v matriki A dve vrstici enaki, je* $\det A = 0$.

(*ii*) *Če je v matriki A ena vrstica linearna kombinacija ostalih vrstic, je* $\det A = 0$.

Dokaz. (*i*) Brez izgube za splošnost predpostavimo, da ima matrika A enaki prvi dve vrstici. Če v matriki zamenjamo dve vrstici, po prejšnji lemi determinanta spremeni predznak. To pomeni

$$\det A = \det(A_1, A_1, A_3, ..., A_n) = -\det(A_1, A_1, A_3, ..., A_n) = -\det A$$

in $\det A = 0$.

(*ii*) Brez izgube za splošnost smemo predpostaviti, da je prva vrstica linearna kombinacija ostalih vrstic, torej $A_1 = \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + ... + \lambda_n A_n$, kjer je $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Ker je determinanta vrstično linearna funkcija, z upoštevanjem prve trditve te posledice sledi

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(A_1, A_2, A_3, ..., A_n) \\
&= \det\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i A_i, A_2, A_3, ..., A_n\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(A_i, A_2, A_3, ..., A_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

in dobili smo željeni rezultat. □

Končajmo z izrekom, ki karakterizira determinanto z njenimi lastnostmi. Izreka v splošnem ne bomo dokazovali, z zgledom ga bomo utemeljili v primeru $n = 2$. V določeni literaturi avtorji definirajo determinanto kot funkcijo z danimi lastnostmi $(i), (ii), (iii)$.

Izrek 5.10. *Naj bo* $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *funkcija, ki ima lastnosti:*
(i) φ *je vrstično linearna funkcija;*
(ii) *če sta v matriki* A *dve vrstici enaki, je* $\varphi(A) = 0$*;*
(iii) $\varphi(I) = 1$.
Potem je $\varphi(A) = \det A$ *za vsak* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Zgled 5. Naj $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zadošča lastnostim $(i), (ii), (iii)$ iz izreka 5.10. Določimo funkcijo φ. Ker je φ vrstično linearna funkcija, upoštevajoč linearnost najprej po prvi vrstici in nato po drugi vrstici, dobimo

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= a_{11}\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{12}\varphi\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{21}\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{11}a_{22}\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{12}a_{21}\varphi\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}a_{22}\varphi\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{12}a_{21}\varphi\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali, da je

$$\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \varphi\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Nadalje, iz točke (ii) sledi, če v matriki zamenjamo vrstici, se spremeni predznak funkcije φ. Namreč, če upoštevamo lastnost (i), lahko zapišemo

$$\varphi(A_1 + A_2, A_1 + A_2) = \varphi(A_1, A_1) + \varphi(A_1, A_2) + \varphi(A_2, A_1) + \varphi(A_2, A_2).$$

Upoštevajoč (ii), dobimo $\varphi(A_1, A_2) = -\varphi(A_2, A_1)$. Zato lahko zapišemo

$$\varphi\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - a_{12}a_{21}\varphi\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je po predpostavki $\varphi(I) = 1$, sledi željeni rezultat $\varphi(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$.

5.4 Računanje determinante

Determinanto matrike običajno računamo z uporabo osnovnih vrstičnih ali stolpčnih operacij in z razvojem determinante po vrstici ali stolpcu. Poglejmo si podrobneje obe metodi.

I. Gaussova metoda

Proučimo najprej vpliv osnovnih vrstičnih operacij na determinanto matrike.

($v1$) Po izreku 5.6 (ii) sledi, da če i-to vrstico matrike A pomnožimo z λ, se determinanta matrike pomnoži z λ :

$$\det(A_1, ..., \lambda A_i, ..., A_n) = \lambda \det A.$$

($v2$) Če i-to vrstico matrike A, pomnoženo z λ, prištejemo k j-ti vrstici, se determinanta matrike ne spremeni. Upoštevajoč izrek 5.6 in posledico 5.9 (i), lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\det(A_1, ..., A_i, ..., A_j + \lambda A_i, ..., A_n) &= \det(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n) \\ &\quad + \lambda \det(A_1, ..., A_i, ..., A_i, ..., A_n) \\ &= \det A.\end{aligned}$$

($v3$) Zamenjava dveh vrstic spremeni predznak determinante (lema 5.8).

Podobno velja tudi za osnovne stolpčne operacije ($s1$)–($s3$). Z metodo Gaussove eliminacije matriko A prevedemo do zgornje trikotne matrike, katere determinanta je enaka produktu diagonalnih elementov. Pri tem operacija ($v2$) oz. ($s2$) ne spremeni determinante, ($v3$) oz. ($s3$) spremeni predznak determinante. Po potrebi lahko z ($v1$) oz. ($s1$) iz determinante izpostavljamo skalarje.

Zgled 1. Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo osnovnih vrstičnih in stolpčnih operacij dobimo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} &\overset{v_{13}(-2), v_{14}(-3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 8 & -7 \end{vmatrix} \overset{v_{23}(3), v_{24}(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} \\ &\overset{s_{34}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} \overset{v_{34}(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18\end{aligned}$$

Zgled 2. Naj bosta a in b realni števili. Izračunajmo determinanto

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

Če prvo vrstico, pomnoženo z -1, prištejemo k vsaki naslednji vrstici, dobimo

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Iz zadnjih treh vrstic lahko izpostavimo $a-b$ in dobimo

$$(a-b)^3 \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nazadnje prištejemo drugi, tretji in četrti stolpec k prvemu in dobimo

$$(a-b)^3 \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zato je iskana determinanta enaka $(a-b)^3 (a+3b)$.

II. Laplaceov razvoj determinante

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Z A_{ij} označimo podmatriko matrike A, v kateri smo odstranili i-to vrstico in j-ti stolpec.

Zgled 3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Potem so na primer

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{41} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

V primeru determinante reda 2 opazimo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} \\ &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned} \tag{5.1}$$

in v primeru determinante reda 3 lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} \\
&= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Pravimo, da smo v primeru (5.1) razvili determinanto reda 2 po prvi vrstici in v primeru (5.2) smo determinanto reda 3 razvili po prvem stolpcu. Dana lastnost velja tudi v splošnem in se imenuje *Laplaceov razvoj determinante.*

Izrek 5.11. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ in $i \in \mathbb{N}_n$. Tedaj velja*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \tag{5.3}$$

Opomba. Zapis (5.3) predstavlja razvoj determinante po i-ti vrstici. Podobna formula velja tudi za razvoj determinante po j-tem stolpcu

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Tako lahko determinanto reda n prevedemo na vsoto n determinant nižjega reda $n-1$. Razvoj determinante po vrstici oz stolpcu je zelo praktičen, če v določeni vrstici ali stolpcu nastopa veliko ničel. Poglejmo si to na zgledu.

Zgled 4. Izračunajmo determinanto

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Začnemo lahko z razvojem po četrti vrstici, ker imamo v dani vrstici samo en neničelni element in nato primerno nadaljujemo:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 6 & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 8 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-4) \begin{vmatrix} 7 & 5 & \mathbf{3} \\ 5 & 0 & \mathbf{0} \\ 7 & 5 & \mathbf{0} \end{vmatrix} \\
&= 8 \cdot 3 \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 24 \cdot 5 \cdot 5 = 600.
\end{aligned}$$

Dokaz izreka 5.11. Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}_n$. Vsoto, ki nastopa v definiciji determinante, razdelimo glede na vrednost permutacije π v točki i, to pomeni $j = \pi(i) \in \mathbb{N}_n$:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}. \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \pi(i)=j}} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} a_{i,j} a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \pi(i)=j}} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n,\pi(n)}.
\end{aligned}$$

Zadošča dokazati, da za vsak $i, j \in \mathbb{N}_n$ velja

$$\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \pi(i)=j}} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n,\pi(n)} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}. \tag{5.4}$$

V vsoti na levi strani enakosti nastopajo samo elementi matrike A_{ij}, ni nobenega elementa matrike A iz i-te vrstice ali j-tega stolpca. Iz vsakega stolpca in vsake vrstice nastopa samo en element. Naj bo $i = j = n$. Potem permutacija π fiksira točko n. Zato lahko π identificiramo s permutacijo π' iz množice $\mathcal{S}_{n-1}$ in vidimo

$$\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \pi(n)=n}} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n-1,\pi(n-1)} = \sum_{\pi' \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon_{\pi'} a_{1,\pi'(1)} a_{2,\pi'(2)} \cdots a_{n-1,\pi'(n-1)} = \det A_{nn}.$$

Splošni primer, ko je $\pi(i) = j$, se prevede na že obravnavanega. Zaporedje transpozicij $(i\; i+1), (i+1\; i+2), ..., (n-1\; n)$ po vrsti zamenja vrstice, dokler i-ta vrstica ne pride na zadnje mesto. Podobno zaporedje transpozicij $(j\; j+1), (j+1\; j+2), ...,$ $(n-1\; n)$ po vrsti zamenja stolpce, dokler j-ti stolpec ne pride na zadnje mesto. Vsaka transpozicija spremeni predznak. Ker smo uporabili $n-i+n-j$ tranpozicij, je končen predznak enak $(-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}$ in enakost (5.4) velja. $\square$

Zaključimo to poglavje z dvema zgledoma. V zgledu 5 bomo spoznali Vandermondovo determinanto, ki je uporabna pri numerični matematiki, v zgledu 6 pa bomo izračunali lastne vrednosti konkretne matrike.

Zgled 5. Naj bodo x_1, x_2, x_3, x_4 realna števila in

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

Vandermondova determinanta reda 4. Izračunajmo to determinanto.

Eliminiramo prvo vrstico determinante tako, da j-ti stolpec, za $j = 1, 2, 3$, pomnožimo z $-x_1$ in prištejemo k $(j+1)$-mu. Lahko zapišemo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & x_2^3 - x_2^2 x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & x_3^3 - x_3^2 x_1 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4 x_1 & x_4^3 - x_4^2 x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2 (x_2 - x_1) & x_2^2 (x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3 (x_3 - x_1) & x_3^2 (x_3 - x_1) \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4 (x_4 - x_1) & x_4^2 (x_4 - x_1) \end{vmatrix}.$$

Dano determinanto razvijemo po prvi vrstici in iz vsake vrstice izpostavimo skupni faktor. Dobimo determinanto

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Če postopek ponovimo na Vandermondovi determinanti reda 3, $V(x_2, x_3, x_4)$, dobimo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 - x_2 & x_3 (x_3 - x_2) \\ 1 & x_4 - x_2 & x_4 (x_4 - x_2) \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} \\ &= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3). \end{aligned}$$

Zato je

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i)$$

enaka produktu vseh razlik $x_j - x_i$, kjer je $i < j$. Dane lastnosti ni težko dokazati tudi v splošnem. Naj bodo $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Potem za Vandermondovo determinanto reda n velja

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Vidimo, da je $V(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ natanko tedaj, ko so $x_1, x_2, ..., x_n$ paroma različna realna števila.

Zgled 6. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Določimo $\lambda \in \mathbb{R}$, da bo $\det(A - \lambda I) = 0$. Omenjena števila pri dani matriki se imenujejo *lastne vrednosti* matrike in igrajo pomembno vlogo v linearni algebri.

Torej

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)(2+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)(2+\lambda)\left((\lambda-1)(\lambda+1)-8\right) \\
&= (1+\lambda)(2+\lambda)\left(\lambda^2-9\right) \\
&= (1+\lambda)(2+\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)\,.
\end{aligned}
$$

Vidimo, da je $\lambda \in \{-1,-2,-3,3\}$. Dana matrika A ima torej štiri lastne vrednosti. Opazimo, da velja

$$\det A = -18 = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 3.$$

Determinanta matrike A je enaka produktu njenih lastnih vrednosti. Omenjena lastnost velja tudi v splošnem.

5.5 Determinanta produkta

Determinanta ima še eno lepo lastnost, je multiplikativna funkcija. To pomeni:

Izrek 5.12. *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Tedaj velja*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz. Naj bo $AB = C$ oziroma

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.
$$

Vrstice matrike C izrazimo kot linearne kombinacije vrstic matrike B:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + \cdots + a_{1n}B_n = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}B_i, \\
C_2 &= a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + \cdots + a_{2n}B_n = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}B_i, \\
&\vdots \\
C_n &= a_{n1}B_1 + a_{n2}B_2 + \cdots + a_{nn}B_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}B_i.
\end{aligned}
$$

Ker je determinanta vrstično linearna funkcija, lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
\det C &= \det(C_1, C_2, \cdots, C_n) \\
&= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1}B_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2}B_{i_2}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n}B_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \det\left(B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_n}\right).
\end{aligned}
$$

Če se v determinanti pojavita dve enaki vrstici, je ta enaka nič. Zato zgoraj omenjena vsota dejansko teče po vseh permutacijah množice $\mathbb{N}_n$. Pri tem je $\pi(1) = i_1, \pi(2) = i_2, ..., \pi(n) = i_n$. Zato velja

$$
\det C = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \det\left(B_{\pi(1)}, B_{\pi(2)}, \cdots, B_{\pi(n)}\right).
$$

Nadalje, v determinanti $\det(B_{\pi(1)}, B_{\pi(2)}, \cdots, B_{\pi(n)})$ zamenjamo vrstice, da si bodo sledile po vrstnem redu $B_1, B_2, ..., B_n$. Vsaka zamenjava dveh vrstic spremeni predznak permutacije. Denimo, da smo pri tem uporabili k zamenjav. To pomeni, da smo permutacijo π zapisali kot produkt k transpozicij. Zato je $(-1)^k = \varepsilon_\pi$ predznak permutacije π in lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
\det C &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \det\left(B_1, B_2, \cdots, B_n\right) \\
&= \left(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\pi a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}\right) \det\left(B_1, B_2, \cdots, B_n\right) \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}
$$

S tem je izrek dokazan. □

Posledica 5.13. *Naj bo A obrnljiva matrika, potem velja*

$$
\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.
$$

Dokaz. Po predpostavki obstaja inverzna matrika A^{-1} in velja $AA^{-1} = I$. Če na dano enakost delujemo z determinanto, ki je multiplikativna funkcija, dobimo

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}, \tag{5.5}$$

od koder sledi želeni rezultat. $\square$

Zgled 1. Pravimo, da sta matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *podobni*, če obstaja obrnljiva matrika $P \in M_n(\mathbb{R})$, da je $B = P^{-1}AP$. Podobnost matrik je ekvivalenčna relacija na algebri $M_n(\mathbb{R})$. Kaj lahko povemo o determinantah podobnih matrik? Iz (5.5) sledi, da imata podobni matriki enako determinanto

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A.$$

Zgled 2. Naj bodo $A, B, X \in M_4(\mathbb{R})$. Določi $\det X$, če veš $\det A = 1, \det B = 4$ in $2AX = X^2B$. Upoštevajoč multiplikativnost in posledico 5.7, iz zadnje zveze sledi

$$\begin{aligned} \det(2AX) &= \det\left(X^2B\right), \\ 2^4 \det A \det X &= \det X \det X \det B. \end{aligned}$$

Kar lahko preuredimo v obliko

$$\det X \left(\det X \det B - 16 \det A\right) = 0.$$

To pomeni, da je bodisi $\det X = 0$ bodisi $\det X = 16 \det A / \det B = 4$.

Zgled 3. Ker vemo, da je determinanta multiplikativna funkcija, lahko hitro preverimo, kako elementarne vrstične operacije vplivajo na determinanto matrike A. Vrstično operacijo predstavimo z delovanjem ustrezne elementarne matrike.

Operacija ($v1$): i-to vrstico matrike A pomnožimo z $\lambda \neq 0$. Potem je

$$A' = [A_1 \cdots \lambda A_i \cdots A_n] = E_i(\lambda) A.$$

Ker je $E_i(\lambda) = E_{11} + ... + \lambda E_{ii} + ... + E_{nn}$ diagonalna matrika, je $\det E_i(\lambda) = \lambda$. Zato velja $\det A' = \det E_i(\lambda) \det A = \lambda \det A$.

Operacija ($v2$): i-to vrstico matrike A, pomnoženo z $\lambda \neq 0$, prištejemo k j-ti vrstici. Potem je

$$A' = [A_1 \cdots A_i \cdots \lambda A_i + A_j \cdots A_m] = E_{ij}(\lambda) A.$$

Ker je $E_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ji}$, je $\det E_{ij}(\lambda) = 1$. Zato velja $\det A' = \det A$.

Operacija ($v3$): zamenjamo i-to in j-to vrstico matrike A. Velja

$$A' = [A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_m] = P_{ij} A,$$

kjer je $P_{ij} = E_{ij} + E_{ji} + \sum\limits_{k \neq i,j} E_{kk}$. Neposredno z računom dobimo, da je $\det P_{ij} = -1$. Torej determinanta v tem primeru spremeni predznak $\det A' = -\det A$.

5.6 Cramerjevo pravilo

V tem podpoglavju si bomo ogledali uporabo determinante pri reševanju kvadratnih sistemov linearnih enačb, spoznali bomo *Cramerjevo pravilo.* Najprej bomo obravnavali povezavo med determinanto in rangom matrike in spoznali nov kriterij za obrnljivost matrik. Videli bomo, da je matrika obrnljiva natanko tedaj, ko ima neničelno determinanto.

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Rang matrike A je število linearno neodvisnih vrstic matrike A, bolj natančno $\operatorname{rang} A = \dim \mathcal{L}\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Povezava med rangom in determinanto matrike je naslednja:

Izrek 5.14. *Za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ sta naslednji lastnosti ekvivalentni*
(i) $\operatorname{rang} A = n$,
(ii) $\det A \neq 0$.

Dokaz. Z uporabo elementarnih vrstičnih operacij $(v2)$ in $(v3)$ matriko A prevedemo do zgornje trikotne matrike

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Denimo, da smo v tem postopku k-krat uporabili operacijo $(v3)$. Operacija $(v3)$ spremeni predznak determinante. Zato je

$$\det A = (-1)^k \det B = (-1)^k b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}.$$

Ker vrstični operaciji $(v2)$ in $(v3)$ ne spremenita ranga matrike, velja $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Rang matrike A je enak n natanko tedaj, ko ima B n linearno neodvisnih vrstic. To pomeni $b_{ii} \neq 0$ za vsak $i \in \mathbb{N}_n$. Ta lastnost velja natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$, in izrek je dokazan. $\square$

Posledica 5.15. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Vrstični vektorji $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{R}^n$ so linearno odvisni natanko tedaj, ko je* $\det A = 0$.

Neposredno iz izrekov 4.13 in 5.14 sledi med drugim karakterizacija, da je matrika A obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Posledica 5.16. *Za matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ so naslednje trditve ekvivalentne:*
(i) *A je obrnljiva matrika,*
(ii) $\operatorname{rang} A = n$,
(iii) $\det A \neq 0$,
(iv) *sistem linearnih enačb $Ax = b$ je enolično rešljiv za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.*

V nadaljevanju naj bo dan sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$. Omenjeni sistem predstavimo v obliki

$$\begin{bmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{oz.} \quad x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = b.$$

Za vsak $i \in \mathbb{N}_n$ označimo z $A_i(b)$ matriko, ki jo dobimo iz matrike A tako, da zamenjamo i-ti stolpec A^i z vektorjem b. Torej

$$A_i(b) = \begin{bmatrix} A^1 \cdots A^{i-1} \; b \; A^{i+1} \cdots A^n \end{bmatrix}.$$

Če je $\det A \neq 0$, je sistem $Ax = b$ enolično rešljiv za vsak $b \in \mathbb{R}^n$. Rešitev takega sistema linearnih enačb lahko eksplicitno izrazimo:

Izrek 5.17 (Cramerjevo pravilo)**.** *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ in $\det A \neq 0$. Potem ima sistem linearnih enačb $x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = b \in \mathbb{R}^n$ enolično rešitev*

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \quad \textit{za vsak } i \in \mathbb{N}_n.$$

Dokaz. Naj bo $i \in \mathbb{N}_n$. Izračunajmo determinanto matrike $A_i(b)$. Pri tem računu upoštevamo, da je determinanta stolpčno linearna funkcija ($\overset{*}{=}$) in če sta v matriki dva stolpca enaka, je njena determinanta enaka nič ($\overset{**}{=}$). Zato velja

$$\begin{aligned}
\det A_i(b) &= \det\left(A^1, ..., A^{i-1}, b, A^{i+1}, ..., A^n\right) \\
&= \det\left(A^1, ..., A^{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_kA^k, A^{i+1}, ..., A^n\right) \\
&\overset{*}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \det\left(A^1, ..., A^{i-1}, A^k, A^{i+1}, ..., A^n\right) \\
&\overset{**}{=} x_i \det\left(A^1, ..., A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, ..., A^n\right) \\
&= x_i \det A.
\end{aligned}$$

Ker je $\det A \neq 0$, smo dobili željeni rezultat. □

Zgled. Z uporabo Cramerjevega pravila poiščimo rešitve sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned}
2x + y + z &= 1, \\
x + 2y + z &= 2, \\
x + y + 2z &= 4.
\end{aligned}$$

Najprej izračunamo potrebne determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\det A_1(b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\det A_2(b) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det A_3(b) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Rešitev danega sistema je

$$x = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = -\frac{3}{4},\ y = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{1}{4},\ z = \frac{\det A_3(b)}{\det A} = \frac{9}{4}.$$

Komentar. Reševanje kvadratnih sistemov linearnih enačb z uporabo Cramerjevega pravila je v praksi neekonomično. V splošnem je potrebno izračunati $n+1$ determinant reda n. Veliko bolj praktično je uporabiti postopek Gaussove eliminacije.

5.7 Inverzna matrika

V tem podpoglavju bomo izpeljali obrazec za izračun inverzne matrike A^{-1} pri obrnljivi matriki $A \in M_n(\mathbb{R})$. Spomnimo se, da z A_{ij} označimo podmatriko matrike A, kjer smo izpustili i-to vrstico in j-ti stolpec. Začnimo z definicijo:

Definicija. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Elementi

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N}_n,$$

se imenujejo *kofaktorji* matrike A in matrika

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

je *prirejenka* matrike A.

Opomba 1. Kofaktorji $\tilde{a}_{ij}$ nastopajo pri razvoju determinante po i-ti vrstici, glej izrek 5.11. Lahko zapišemo

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}.$$

To pomeni, da je determinanta matrike enaka skalarnemu produktu i-te vrstice matrike A in i-tega stolpca prirejenke $\tilde{A}$, $\det A = A_i \cdot \tilde{A}^i$.

Zgled 1. Kofaktorji matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

so $\tilde{a}_{11} = a_{22}$, $\tilde{a}_{12} = -a_{21}$, $\tilde{a}_{21} = -a_{12}$ in $\tilde{a}_{22} = a_{11}$. Zato je prirejenka matrike A enaka

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Predpostavimo, da je $A \in M_2(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika. Hitro vidimo, da lahko matriko A^{-1} izrazimo s pomočjo prirejenke $\tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

Dana formula velja tudi v splošnem.

Izrek 5.18. *Če je $A \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika, velja*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}. \tag{5.6}$$

Dokaz. Dokazali bomo, da velja $A\tilde{A} = \det A \cdot I$, kar je v primeru obrnljive matrike ekvivalentno (5.6). Izračunajmo (i, j)-ti element matrike $A\tilde{A}$:

$$(A\tilde{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det A_{jk}.$$

Z uporabo izreka 5.11 opazimo, da je omenjeni zapis dejansko razvoj determinante matrike A' po j-ti vrstici, kjer smo v A j-to vrstico zamenjali z i-to vrstico. Če se v determinanti pojavita dve enaki vrstici, je determinanta enaka nič. Zato velja

$$(A\tilde{A})_{ij} = \det(A_1, ..., A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, ..., A_n) = \begin{cases} \det A & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}.$$

Dobili smo

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I$$

in izrek je dokazan. $\square$

Opomba 2. Izrek 5.18 lahko elegantno dokažemo tudi z uporabo Cramerjevega pravila. Rešimo matrično enačbo $AX = I$, to pomeni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Za vsak $j \in \mathbb{N}_n$ označimo z $x_j = X^j \in \mathbb{R}^n$ j-ti stolpec matrike X in z $e_j = I^j \in \mathbb{R}^n$ j-ti stolpec identitete I. Po izreku 5.17 je rešitev sistema $Ax_j = e_j$ enaka

$$x_{ij} = \frac{\det A_i\left(e_j\right)}{\det A} \quad \text{za vsak } i \in \mathbb{N}_n.$$

Če razvijemo determinanto

$$\det A_i\left(e_j\right) = \det\left(A^1, \cdots, A^{i-1}, e_j, A^{i+1}, \cdots, A^n\right)$$

po i-tem stolpcu, ki vsebuje enico v j-ti vrstici, na ostalih mestih so ničle, dobimo

$$\det A_i\left(e_j\right) = (-1)^{i+j} \det A_{ji} = \tilde{a}_{ji} = \tilde{A}_{ij}.$$

Zato velja

$$x_{ij} = \frac{\tilde{A}_{ij}}{\det A} \quad \text{za vsak } i, j \in \mathbb{N}_n$$

in inverzna matrika ima želeno obliko.

Zgled 2. Z uporabo obrazca (5.6) izračunajmo inverzno matriko od

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kofaktorji matrike A so

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \\
\tilde{a}_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\
\tilde{a}_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.
\end{aligned}$$

Prirejenka matrike A je enaka

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 16,$$

sledi

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Komentar. Računanje inverzne matrike A^{-1} po obrazcu (5.6) je za $n \geq 3$ neekonomično. V splošnem je potrebno izračunati eno determinanto reda n in n^2 determinant reda $n-1$. Veliko bolj praktično je uporabiti elementarne vrstične operacije in postopek VKF $[A|I] = [I|A^{-1}]$.

Zgled 3. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Določimo determinanto prirejenke $\tilde{A}$. Matriko A s prirejenko $\tilde{A}$ povezuje zveza $A\tilde{A} = \det A \cdot I$. Če z determinanto, ki je multiplikativna funkcija, delujemo na dano zvezo in upoštevamo posledico 5.7, dobimo

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det \tilde{A} &= \det(\det A \cdot I) \\ \det A \cdot \det \tilde{A} &= (\det A)^n \cdot \det I = (\det A)^n. \end{aligned}$$

Zato je $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$. Dana formula velja tudi v primeru, ko je $\det A = 0$. Tedaj je seveda $\det \tilde{A} = 0$, ker je matrika A obrnljiva natanko tedaj, ko je obrnljiva prirejenka $\tilde{A}$.

Literatura

[1] D. Benkovič, *Algebra I, zbrano gradivo: naloge na vajah, kolokviji in pisni izpiti*, Fakulteta na naravoslovje in matematiko, Maribor 2010.

[2] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna, *Naloge iz algebre I*, DMFA, Ljubljana 1992.

[3] M. Kolar, B. Zgrablić, *Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre*, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.

[4] T. Košir, *Linearna algebra*, povzeto z naslova: http://www.fmf.uni-lj.si/˜kosir/poucevanje/linalg.html.

[5] F. Križanič, *Matematika II*, DMFA, Ljubljana 1991.

[6] S. Lange, *Introduction to Linear Algebra, Second Edition*, Springer, 1986.

[7] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA, Ljubljana 1994.