Izpit pri predmetu **TEORIJA GRAFOV**
5.2.2020

Čas reševanja je **120 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti!

1. **[30]** Dana sta grafa G in H. Naj bo $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Naj bo $G \odot H$ graf, ki ga dobimo na naslednji način. Najprej narišemo eno kopijo grafa G in n kopij grafa H, ki jih označimo s $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (kopija H_i ustreza vozlišču u_i). Nato za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vsa vozlišča kopije H_i povežemo z vozliščem u_i.

   (a) Naj bosta $n \geq 3$ in $p \geq 3$. Določite $\chi(K_n \odot P_p)$. Ali je vsak graf $K_n \odot P_p$ barvno kritičen?

   (b) Dokažite, da za poljubna grafa G in H velja: $\chi(G \odot H) = \max\{\chi(G), \chi(H)+1\}$.

2. **[25]** Naj bo G k-povezan graf, $k \geq 2$. Dokažite, da za vsak izbor k vozlišč iz grafa G, v grafu G obstaja cikel, ki vsa omenjena vozlišča vključuje.

3. **[20]** Naj bo G poljuben graf. Igralca A in B igrata igro na grafu G na naslednji način. Najprej igralec A izbere poljubno vozlišče $x \in V(G)$, nato B izbere poljubno vozlišče, sosednje vozlišču x. Opisano igralca ponavljata, pri čemer mora veljati, da je vsako vozlišče grafa izbrano največ enkrat. Zmagovalec igre je igralec, ki (lahko) zadnji izbere vozlišče grafa.
   Dokažite, da velja naslednje.

   (a) Če graf G premore popolno prirejanje, potem ima igralec B zmagovalno strategijo (lahko v igri zagotovo zmaga).

   (b) Če graf G ne premore popolnega prirejanja, potem ima igralec A zmagovalno strategijo (lahko v igri zagotovo zmaga).

4. **[25]** Naj bo T poljubno drevo z m vozlišči in naj $(m-1)|(n-1)$. Dokažite: $R(T, K_{1,n}) = m + n - 1$.